

<https://doi.org/10.21555/top.v750.3316>

En defensa de la concepción ingenua de “conjunto”

In Defense of the Naive Conception of Set

Manuel Eduardo Tapia Navarro

Universidad de la Libertad
México

meduardo.tapia@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0006-2899-1813>

Recibido: 21 - 11 - 2024.

Aceptado: 10 - 03 - 2025.

Publicado en línea: 01 - 04 - 2026.

Cómo citar este artículo: Tapia Navarro, M. E. (2026). En defensa de la concepción ingenua de “conjunto”. *Tópicos, Revista de Filosofía*, 75, 455-500. <https://doi.org/10.21555/top.v750.3316>



This work is licensed under a Creative Commons Attribution
-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Resumen

En este artículo, respondo a las objeciones de Incurvati (2020, pp. 101-127) contra la concepción ingenua de “conjunto”. Esta es la concepción según la cual un conjunto es la colección de los objetos que satisfacen una propiedad. Siguiendo las objeciones de Incurvati, defiendo que (i) la debilidad de una variedad de teorías inconsistentes no es razón para rechazarlas, (ii) las teorías ingenuas de conjuntos son tan *ad hoc* como ZFC (y otras teorías clásicas) y que (iii) no hay razones para creer que las teorías ingenuas de conjuntos (formalizadas en una lógica relevante) son teorías de objetos no extensionales.

Palabras clave: teoría de conjuntos; Axioma de Comprensión; debilidad teórica; teorías *ad hoc*; extensionalidad; concepción ingenua; concepción iterativa; lógica paraconsistente; teoría inconsistente; matemática no clásica.

Abstract

In this paper, I reply to Incurvati's (2020, pp. 101-127) objections against the naive conception of set. This is the conception according to which a set is the collection of objects that satisfy a given property. Following Incurvati's objections, I claim that (i) the weakness of a variety of inconsistent theories is no reason to reject them, (ii) naive set theories are as *ad hoc* as ZFC (and others classical theories), and that (iii) there is no compelling reason to believe that naive set theories (formalized in relevant logics) are theories of non-extensional objects.

Keywords: set theory; Comprehension Axiom; theoretical weakness; *ad hoc* theories; extensionality; naive conception; iterative conception; paraconsistent logic; inconsistent theory; non-classical mathematics.

La noción ingenua de “conjunto” es aquella según la cual los conjuntos son objetos extensionales determinados por una propiedad. Usualmente se sostiene que esta noción es capturada por dos axiomas elementales de la teoría de conjuntos:

Axioma de Extensionalidad (Ext):

$$\forall x \forall y \forall z ((z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

Axioma de Comprensión (Comp):

$\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \phi(z))$ tal que en no aparece y libre

Tradicionalmente se ha rechazado esta noción de “conjunto” ya que es bien conocido que genera inconsistencias, optando por utilizar versiones más débiles de (Comp), como el Axioma de Separación —en lo siguiente (Sep)— en ZFC:¹ $\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (\phi(z) \wedge z \in A))$ tal que en no aparece y libre y A es un conjunto. Algunos filósofos como Priest (2006b) y Routley (2019) han defendido esta noción como aquella que captura auténticamente el concepto de “conjunto”, a pesar de su carácter inconsistente. Mientras que tradicionalmente se ha optado por identificar el problema de la noción ingenua en (Comp) (conservando los principios de la lógica clásica), el defensor de la noción ingenua opta por identificar el problema en el principio *ex contradictione quolibet* ($\alpha, \neg \alpha \vdash \beta$) presente en la lógica clásica. Por lo cual optan por usar una lógica paraconsistente en lugar de la lógica clásica como lógica subyacente.² Llamaré “Teoría de Conjuntos Inconsistente”³ a una teoría

¹ Esta axiomatización se conoce así por las siglas de los proponentes que formularon los axiomas de la teoría, Zermelo y Fraenkel, junto con el Axioma de Elección (Choice Axiom). Para una formulación precisa de esta teoría, cfr. Jech (2002).

² Una lógica paraconsistente es aquella en la que precisamente el principio *ex contradictione quodlibet* es inválido.

³ Llamo a estas teorías *inconsistentes* en lugar de *paraconsistentes* porque, en el proyecto estudiado aquí, el Axioma de Comprensión se considera de forma absolutamente irrestricta. Por ejemplo, en Carnielli y Coniglio (2016) se formaliza una teoría de conjuntos en una lógica paraconsistente, pero se utiliza la teoría ZF, no (Comp) en general. Por otro lado, no quiero sugerir que estas teorías son resultado de investigar la formalización de la teoría de conjuntos en otra lógica, sino reflejar la tesis sustancial sobre los conjuntos detrás de la estrategia. Sin embargo, esto no es relevante para los argumentos esgrimidos aquí.

que toma la noción ingenua de “conjuntos” pero la formaliza con lógica paraconsistente como subyacente a la teoría, y en este sentido es una teoría de la noción ingenua.

Recientemente, las teorías inconsistentes han recibido poca atención, así como las razones para motivarla. Incurvati (2020) ha adoptado una actitud diferente tomando la noción ingenua (y las teorías inconsistentes de conjuntos) como una alternativa *rival* a la noción tradicional⁴ y ha criticado esta noción de “conjunto”.

La crítica a la noción ingenua expuesta por Incurvati es que las teorías inconsistentes tienen al menos alguno de los siguientes problemas:

Debilidad: muchas de las teorías de conjuntos inconsistentes han mostrado ser muy débiles para sostener una noción interesante de “conjunto”. La principal razón de ello es que las lógicas paraconsistentes (subyacentes a estas teorías), al rechazar *ex contradictione quodlibet*, rechazan también inferencias equivalentes o que producen consecuencias similares, como el silogismo disyuntivo, el *modus ponens* o la transitividad del condicional,⁵ inferencias que parecen fundamentales para la obtención de resultados importantes en la teoría de conjuntos, como el teorema de Cantor.

Ad hoc: si bien hay ejemplos de teorías inconsistentes que han mostrado ser lo suficientemente fuertes para obtener resultados importantes, estas teorías se basan en lógicas que resultan *ad hoc* al menos en una de dos maneras: (1) en cuanto las nociones lógicas que utilizan (en particular, el condicional) no parecen rescatar una lectura intuitiva de los axiomas de la noción ingenua

⁴ A lo largo de esta introducción, entenderé a la noción iterativa de “conjunto” característica de ZFC y la jerarquía acumulativa como la noción tradicional de “conjunto”. El sentido en que la noción ingenua de “conjunto” es *rival* a la noción tradicional es que ambas buscan hablar sobre los mismos objetos y ser verdaderas acerca de estos, y sin embargo son incompatibles. Más adelante especificaré en qué sentido son incompatibles siguiendo los conceptos de Incurvati.

⁵ Estas son capturadas mediante las reglas $\alpha \vee \beta, \neg\alpha \Vdash \beta; \alpha \rightarrow \beta, \alpha \Vdash \beta, \gamma, \alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \Vdash \alpha \rightarrow \gamma$, respectivamente.

o no se argumenta que así sea —contra, por ejemplo, la implicación relevante de Priest (2006b, p. 271)— o (2) en cuanto no hay motivación independiente para la lógica subyacente de la teoría más allá de recuperar las inferencias conflictivas, como el *modus ponens* —contra Weber (2010b) y el uso ahí de la lógica DLQ—.

Extensionalidad: las teorías inconsistentes (especialmente las teorías basadas en una lógica de la relevancia) corren el riesgo de no ser teorías del concepto general de “conjunto”, al no poder mostrar el carácter extensional de algunos conjuntos. Considérese un conjunto A y una oración verdadera ϕ ; intuitivamente, A y el conjunto $\{x: x \in A \wedge \phi\}$ tienen los mismos elementos y por lo tanto deben ser idénticos. Pero no es posible demostrar la fórmula $x \in A \leftrightarrow x \in A \wedge \phi$ pues para ello se comete una falacia de irrelevancia.

De estas deficiencias, Incurvati (2020) concluye que la noción ingenua de “conjunto” no puede ser la noción correcta, cooperando en favor de la corrección de la noción tradicional.

En este artículo, argumentaré que las objeciones de Incurvati no son concluyentes, en el sentido de que no tienen el impacto deseado por Incurvati. Los argumentos que aduciré contra cada argumento son los siguientes:

Contra Debilidad: argumentaré que, aunque es cierto que algunas teorías de conjuntos inconsistentes no son capaces de demostrar teoremas considerados importantes, esto no es suficiente para rechazar la noción ingenua de “conjuntos”. La razón es que no se puede esperar que estos teoremas se sostengan si se está tomando en serio la noción ingenua, ya que esta es distinta (en su naturaleza misma) de la noción tradicional y puede tener objetivos distintos.

Contra *Ad hoc*: argumentaré que las motivaciones de las teorías inconsistentes son tan *ad hoc* como las motivaciones de los axiomas de ZFC —específicamente, los axiomas introducidos por Zermelo (1967)—. Para

ello compararé las estrategias de ambos mostrando que se rechaza en cada caso —para evitar los problemas derivados de (Comp)— y qué identifica cada uno como el problema fundamental. En consecuencia, mostraré que las motivaciones para (Sep) son tan *ad hoc* como la elección de lógicas.

Contra Extensionalidad: argumentaré que esto es un problema solo si se atribuye a (Ext) capacidades preteóricas distintas a ser un criterio de identidad. Sin embargo, en los casos problemáticos, (Ext) sigue funcionando como criterio de identidad. Por lo cual no representa un concepto distinto de “conjunto”, aunque sí muestra que en estas teorías los conjuntos tienen propiedades distintas, pero esto es esperable ante el cambio de lógica.

Además de esto, argumentaré que la estrategia de Incurvati no puede cumplir con sus pretensiones e incluso refleja serias deficiencias de la noción tradicional. Sin embargo, no argumentaré que la noción tradicional de conjunto es “incorrecta”; mi posición aquí es más bien cercana al pluralismo sobre teoría de conjuntos. Mis respuestas a las objeciones de Incurvati suponen en cierta medida su metodología y sus parámetros de evaluación. Sin embargo, este último argumento pretende mostrar deficiencias en la metodología misma de Incurvati, así que se debe entender esta última parte del argumento en un nivel diferente al resto de los argumentos.

La estructura de este artículo es como sigue: en la sección 1 presentaré algunos conceptos expuestos por Incurvati para establecer la discusión y contextualizar su estrategia argumentativa general. En las secciones 2, 3 y 4 expondré las objeciones esbozadas más arriba: Debilidad, *Ad hoc* y Extensionalidad, respectivamente, así como mis respuestas. En la sección 5 argumentaré que, a partir de las respuestas de las secciones 2, 3 y 4, se muestra que la estrategia de Incurvati no tiene el impacto que busca para sostener que la concepción iterativa es mejor.⁶

⁶ Me gustaría mencionar que la estructura de este trabajo no sigue en estricto sentido la exposición de Incurvati (2020, pp. 101-127), pero sí el planteamiento que hace Incurvati en el prefacio del libro (Incurvati, 2020, p.

1. El concepto de “conjunto” y sus concepciones

El objetivo de Incurvati no es simplemente rechazar la noción ingenua, sino que dicho rechazo sirva para mostrar que la noción tradicional es correcta. Para esto, Incurvati no argumenta directamente contra la noción ingenua de “conjunto”, sino que lo hace contra las teorías matemáticas específicas que buscan capturarla.

Incurvati distingue entre el *concepto* de “conjunto” y una *concepción* de “conjunto”. El concepto relevante en este caso es el concepto que se manifiesta en la matemática elemental, es decir, aquel mediante el cual podemos hablar del *conjunto* de los números naturales. Incurvati identifica tres propiedades de este concepto:

Unidad: “Un conjunto es una unidad, es decir un objeto simple, con preponderancia conceptual a sus miembros” (Incurvati, 2020, p. 5).⁷ Los conjuntos son agrupaciones de objetos, pero son agrupaciones consideradas en sí mismas como un *todo*.

Descomposición única: lo que distingue un conjunto de una *fusión* es que un conjunto tiene una descomposición única en sus miembros: “para cada conjunto *a*, hay una *y* solo una lista de las cosas tales que son miembros de *a* y su unión es *a*” (Incurvati, 2020, p. 6).

Extensionalidad: los conjuntos son entidades extensionales, en el sentido de que “los conjuntos deben ser idénticos, si tienen los mismos miembros” (Incurvati, 2020, p. 11).⁸

xiii), que sigue a su vez la presentación de Priest (2006b, pp. 247-261) de la teoría de conjuntos paraconsistente. La razón para favorecer esta presentación es que refleja el tipo de problemas filosóficos que se pueden ofrecer a las teorías inconsistentes.

⁷ Original en inglés; mi traducción. En lo que sigue, todas las traducciones son igualmente realizadas por mí, a menos que la cita sea a una traducción.

⁸ Incurvati sostiene que el concepto de conjunto está compuesto por estas tres propiedades. Aunque no considero que esto necesariamente sea el

La última propiedad tiene un papel fundamental para Incurvati, pues mientras cada una de estas propiedades forman parte constitutiva del concepto de “conjunto”, Extensionalidad es la única que tiene un correlato formal específico: el axioma (Ext). Incurvati sostiene que el concepto de “conjunto” debe tener un criterio de identidad y uno de aplicación, por lo cual le atribuye al axioma la facultad para establecer un criterio de identidad para el concepto de “conjunto”. El problema es que el criterio de aplicación no es del todo claro. Aunque hay casos claros de objetos que son conjuntos y otros que no lo son, hay muchas colecciones en las que hay desacuerdo sobre su carácter conjuntista. Las concepciones son respuestas a este problema:

Concepción: una *concepción* de C , donde C es un concepto, es una respuesta (posiblemente parcial) a la pregunta “¿Qué significa que algo caiga bajo el concepto C ?”, la cual alguien podría aceptar o no sin razonablemente considerar que no entiende C (cfr. Incurvati, 2020, p. 13).

En el caso conjuntista, una *concepción* de “conjunto” es una respuesta sobre el alcance de aplicación del concepto de “conjunto”, pero conservando las tres propiedades del concepto.

Aquí nos interesa estudiar la noción ingenua que es llamada por Incurvati *concepción ingenua*.⁹ Introduciré la concepción iterativa y la ingenua para caracterizarlas como concepciones rivales. La concepción iterativa sostiene que los conjuntos se forman o construyen en *niveles*. En el primer nivel se encuentran los *individuos*, es decir, las entidades que no son conjuntos, en el sentido de que no tienen miembros. Los niveles subsecuentes se conforman por todos los conjuntos de individuos posibles, y todos los conjuntos cuyos miembros son conjuntos presentes en niveles anteriores. La imagen usual de esta concepción es una jerarquía en la que cada nivel contiene todos los conjuntos cuyos miembros son objetos de niveles anteriores. Existe una gran variedad

caso, asumiré que lo son porque mis respuestas a sus argumentos no dependen de ello.

⁹ En el resto del artículo la llamaré “concepción ingenua” en lugar de “noción ingenua” para seguir la terminología de Incurvati. De la misma forma, llamaré “concepción iterativa” a la noción tradicional de “conjunto” característica de la jerarquía acumulativa de conjuntos.

de teorías que se adhieren a esta concepción; la más tradicional es la axiomatización estándar de la teoría de conjuntos ZFC.¹⁰ La motivación para esta concepción es la intuición de que “hay una relación sustancial de prioridad o dependencia entre un conjunto y sus miembros” (Incurvati, 2020, p. 36).

Por otro lado, la concepción ingenua de “conjunto” afirma que toda propiedad (o condición) determina un conjunto. Usualmente se ha sostenido que esta concepción se caracteriza por los siguientes axiomas:

Axioma de Extensionalidad (Ext):

$$\forall x \forall y \forall z ((z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

Axioma de Comprensión (Comp):

$$\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \phi(z)) \text{ tal que en } y \text{ no aparece } y \text{ libre}$$

La principal motivación para esta concepción es precisamente la idea de que (Comp) es intuitivamente verdadero en cuanto podemos agrupar en un conjunto a todos aquellos (y solo a aquellos) objetos que satisfacen una fórmula de primer orden. Sin embargo, es bien conocido que esta concepción de “conjunto” genera inconsistencias cuando se consideran en lugar de $\phi(x)$ las propiedades de $x \notin x$, $x \in \text{ORD}$ o $x \in \text{CARD}$.¹¹ Por esto, se dice que la concepción ingenua de conjuntos es inconsistente, lo cual en lógica clásica implicaría que la teoría es trivial a partir del principio *ex contradictione quodlibet*: $\alpha, \neg\alpha \Vdash \beta$.¹² Tradicionalmente se ha identificado el problema en las inconsistencias mismas, por eso se ha conservado el principio *ex contradictione quodlibet* (coloquialmente llamado “Principio de explosión”) como parte de la lógica clásica. El defensor de la concepción ingenua busca formalizarla en una lógica

¹⁰ Incurvati opta por caracterizar de forma minimal la concepción iterativa con la teoría Z^+ . Esta está constituida por los axiomas de ZFC sin los axiomas de Reemplazo y Elección y sustituyendo Fundación (o Regularidad) por el principio $\forall x \exists \alpha \exists y (y = V_\alpha \wedge x \subseteq y)$.

¹¹ A los razonamientos que generan inconsistencias a partir de estas propiedades se les conocen como la paradoja de Russell, la paradoja de Burali-Forti y la paradoja de Cantor, respectivamente. Junto con otras, estas son conocidas como *paradojas de la teoría de conjuntos*.

¹² Una teoría T es *trivial* si para toda oración de la teoría ϕ , $T \Vdash \phi$. En términos informales, una teoría es trivial si puede demostrar cualquier oración de la teoría.

paraconsistente: una lógica que no incluye *ex contradictione quodlibet* —cfr. Badía y Weber (2019), Istre (2017), Priest (2006b), Weber (2010b, 2012 y 2021)—. Llamaré a este proyecto *proyecto paraconsistentista*. Las objeciones de Incurvati van dirigidas a este proyecto, caracterizado por dos objetivos:

No trivialidad: las teorías que busquen formalizar la concepción ingenua de “conjunto” deben ser no triviales, en el sentido de no demostrar todas las oraciones de la teoría.¹³

Recaptura: se debe recuperar una serie de resultados de la teoría de conjuntos estándar para preservar el interés de la teoría (cfr. Priest, 2006b, p. 248).

La noción de “concepción” implica que la distinción entre dos concepciones de conjunto recae en un desacuerdo entre estas con respecto al alcance de aplicación del concepto de “conjunto”. La concepción iterativa y la concepción ingenua difieren sobre la aplicación de “conjunto” en casos como V (la colección de todos los conjuntos), R (la colección de Russell: $R = x: x \notin x$) o ORD (la colección de los ordinales). Estos son conjuntos según la concepción ingenua pero, según la concepción iterativa, no. La distinción es conceptual: el defensor de la concepción ingenua afirma que son conjuntos porque se determinan mediante una propiedad. El defensor de la concepción iterativa, en contraste, afirma que no lo son porque no se construyen en ningún nivel de la jerarquía.¹⁴ Incurvati introduce otra distinción que resultará fundamental. Una concepción *combinatoria* de “conjunto” es aquella en que los conjuntos están determinados por sus miembros completamente, de forma independiente de cualquier condición que pueda determinarlos. En contraste, una concepción *lógica* de “conjunto” es aquella en la que los miembros de un conjunto se determinan a través

¹³ Aunque un paso en esta dirección es invalidar *ex contradictione quodlibet*, en la literatura —por ejemplo, Priest (2006b, pp. 83-84)— es bien conocido que se puede obtener trivialidad por otras vías, como la paradoja de Curry, por lo cual bloquear esta paradoja forma parte del proyecto.

¹⁴ Pues la jerarquía dejaría de reflejar la dependencia de un conjunto con respecto a sus miembros: de aceptar alguno de estos conjuntos, habría un conjunto que se forma simultáneamente a sus miembros.

de una propiedad o predicado. Estas categorías no son excluyentes o al menos no es necesario pensarlas de esa forma. Sin embargo, la concepción iterativa es una concepción combinatoria, mientras que la ingenua es una concepción lógica.

Para acentuar las diferencias entre ambas concepciones, podemos utilizar otra distinción introducida por Incurvati: *axiomas de naturaleza* y *axiomas de grado*. “Los axiomas de naturaleza están justificados con base en lo que la concepción considera que son los conjuntos y con base en lo que el concepto de ‘conjunto’ es; los axiomas de grado están justificados con base en cuántos conjuntos hay de acuerdo a la concepción” (Incurvati, 2020, p. 23). La concepción iterativa tiene dos axiomas de naturaleza: Extensionalidad y Fundación (los demás serían axiomas de grado). En contraste, la concepción ingenua no tiene axiomas de grado, pero (Ext) y (Comp) son de naturaleza. Con estos elementos se puede entender el sentido en que estas concepciones son *rivales*: ambas son concepciones del mismo concepto, pretenden ser verdaderas de este y son concepciones auténticamente distintas.¹⁵

¿Qué criterios nos permiten establecer que una concepción es mejor que otra? La estrategia de Incurvati procede de forma indirecta, no atacando la tesis de la concepción misma sino atacando las teorías que buscan capturarla. El principal criterio de comparación que utiliza Incurvati (2020, p. 65) es el razonamiento a la mejor concepción —de aquí en adelante (RMC)— para favorecer la concepción iterativa. Según esta estrategia, la concepción iterativa es más satisfactoria con respecto a otras concepciones en tanto que:

1. Ofrece una explicación convincente de las paradojas mientras muestra por qué los axiomas tradicionales de la teoría de conjuntos son verdaderos (cfr. Incurvati, 2020, p. 65).

¹⁵ Incurvati sostiene que la concepción iterativa y la ingenua se distinguen en todas las formas antes mencionadas: en la extensión del concepto, en la distinción combinatoria y lógica y en los tipos de axioma. Asumiré que efectivamente ambas concepciones se distinguen en todas estas formas para enfocarme en los argumentos específicos. Mis argumentos pretenden mostrar que, aun asumiendo muchos de los conceptos de Incurvati, el defensor de la concepción ingenua puede ofrecer una respuesta.

2. Puede ofrecer teorías que capturen una cantidad sustancial de matemáticas para ofrecer una fundación para la matemática¹⁶ y dar cuenta de la noción de “infinito”, lo que representa que las teorías son interesantes y útiles sobre el concepto de “conjunto” (cfr. Incurvati, 2020, p. 66).

Si bien es cierto que otras concepciones pueden cumplir con estos objetivos, Incurvati busca argumentar que la concepción iterativa lo hace mejor y en esa medida es la concepción correcta de “conjunto”.

Con estos criterios se puede ver la relevancia de objetar las teorías que se adhieren a la concepción ingenua más que a la concepción misma. Vale la pena notar que el proyecto paraconsistentista parece compartir con Incurvati la necesidad de recuperar una cantidad importante de matemática para garantizar su interés. Sin embargo, Incurvati le impone un rol metodológico más fuerte. En el proyecto paraconsistentista, su violación sería una deficiencia (una muy importante), pero parece que no impacta la motivación inicial de la concepción ingenua. Para Incurvati, violarla implicaría la descalificación de la concepción y de cualquier motivación. Esto no es exagerado: la argumentación en favor de la concepción iterativa descansa mucho en (RMC). A continuación, expondré y responderé a las objeciones de Incurvati. Para ello asumiré el análisis y distinciones hechas por él y expuestas en esta sección, a excepción de 2 en (RMC). Este será relevante, pues la primera objeción descansa en este supuesto específico y argumentaré que su uso en el argumento contra la concepción ingenua no es del todo exitoso dado que tiene limitaciones.

¹⁶ Usaré de forma indistinta “fundación” y “fundamentación” de la matemática, pues la distinción no es relevante en la discusión que desarrollaré aquí. Entenderé que una fundación (o fundamentación) de una teoría matemática es una representación de esta en términos de otra teoría matemática. Por ejemplo, ZFC es una fundación para la aritmética de Peano a partir de los números naturales de Von Neumann. Sin embargo, no sostengo aquí que esta representación implique que los objetos de una teoría pueden ser ontológicamente reducidos a los objetos de otra.

2. La objeción de Debilidad en las teorías inconsistentes de conjuntos

La primera objeción consiste en mostrar que algunas de las teorías inconsistentes de conjuntos son demasiado débiles: estas teorías no pueden demostrar una serie de resultados que se esperan de una teoría de conjuntos para poder fungir como fundamento de la matemática y como teoría para el estudio de conceptos como “infinito”. Incurvati (2020, p. 105) se enfoca principalmente en el desarrollo de lo que Priest llama *estrategia material*, donde la lógica subyacente es LP en su presentación enteramente extensional.¹⁷ Esta objeción se puede estructurar en general para otras teorías paraconsistentes basadas en otras lógicas que son incapaces de demostrar ciertos teoremas. Por ejemplo, el propio Incurvati menciona que este problema se presenta para la extensión implicativa de LP ($LP\Rightarrow$) o incluso se puede formular siguiendo las preocupaciones de Istre (2017, p. 56) para abarcar el caso del teorema del colapso de Mostowski. Por esto vale la pena estructurar la objeción de una forma general.

Incurvati considera para esta objeción a las teorías paraconsistentes de conjuntos basadas en las lógicas LP (Priest, 2006b, pp. 73-81), $LP\Rightarrow$ (Priest, 2006b, pp. 73-81 y 270-271) LP_m , LP_+ , LP_+ y LP_+ (cfr. Crabbé, 2011 y Thomas, 2014). Llamaremos a las teorías de conjuntos basadas en estas lógicas NLP , $NLP\Rightarrow$, NLP_m , NLP_+ , NLP_+ y NLP_+ respectivamente. Incurvati establece la debilidad de estas teorías a partir de una serie de resultados que exhiben la incapacidad de estas para demostrar (o caracterizar) resultados (o estructuras) tradicionalmente esperados de una teoría de conjuntos:

NLP : la teoría de conjuntos basada en LP falla en demostrar el teorema de Cantor, fundamental para la caracterización conjuntista del concepto de “infinito”. Esto sucede a partir de que el condicional material de

¹⁷ Para una presentación completa de esta lógica y de los elementos relevantes para esta sección, cfr. Priest (2006b, pp. 73-81). Esta lógica invalida (además de *ex contradictione quodlibet*) el *modus ponens*. Ante esta limitante, Priest (2006b, pp. 270-271) extiende LP con una conectiva de implicación que valida el *modus ponens*. Aquí llamaré a esta extensión la *extensión implicativa de LP* ($LP\Rightarrow$).

LP (definido como $\alpha \supset \beta \equiv_{\text{def}} \neg\alpha \vee \beta$) no satisface el *modus ponens*; en consecuencia, la conectiva bicondicional (definida como $\alpha \equiv \beta \equiv_{\text{def}} \alpha \supset \beta \wedge \beta \supset \alpha$) no satisface transitividad ($\alpha \equiv \beta, \beta \equiv \gamma \vdash \alpha \equiv \gamma$), fundamental para demostrar el teorema de Cantor.

Así mismo, Thomas (2014) mostró que NLP no puede probar la existencia de conjuntos que *se comporten como* conjuntos unitarios, productos cartesianos y ordenes lineales infinitos. Thomas caracterizó formalmente la idea de que un conjunto se comporte como unitarios, productos cartesianos y orden lineal, mostrando una serie de fórmulas que capturan algunas lecturas intuitivas de estos conceptos. Finalmente, Thomas demuestra que hay un modelo de NLP en el que ningún conjunto satisface estas condiciones, para cada caso.

NLP \Rightarrow : el principal problema que presenta esta teoría es que, al igual que NLP, no puede demostrar el teorema de Cantor. Aunque la conectiva de implicación \Rightarrow es capaz de validar el *modus ponens* y transitividad de \equiv , el problema se presenta en general con las pruebas *por reducción*.¹⁸ Y por supuesto, la prueba tradicional del teorema de Cantor es una prueba por reducción.

NLP_m y NLP_ε: el problema con estas teorías es que solo tienen un modelo y es *casi trivial* en el sentido de que de la teoría se sigue $\forall x \forall y (x \in y \wedge x \notin y)$, y dicho modelo solo tiene un elemento (Thomas, 2014, p. 348).

NLP₌ y NLP₂: el problema con estas teorías es similar al segundo presentado para NLP: no es capaz de mostrar la existencia de conjuntos que *se comporten como* conjuntos unitarios, producto cartesiano y orden lineal infinito. El argumento de Thomas es el mismo que para NLP, simplemente se toma como referencia la noción de “consecuencia” correspondiente a estas lógicas.

¹⁸ La regla de reducción se puede presentar de diversas maneras. En general, consideraré las pruebas por reducción según la siguiente estructura de regla: si $\Gamma, \alpha \vdash \beta \wedge \neg\beta$ entonces $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

Con este tipo de resultados en mente, Incurvati sostiene que estas teorías son demasiado débiles para apoyar la concepción ingenua de “conjunto”. La objeción puede estructurarse de la siguiente manera:

1. Una teoría de conjuntos T es *muy débil* si no es capaz de recuperar una cantidad *razonable* de resultados de la teoría de conjuntos estándar.
2. Si una teoría de conjuntos T es muy débil, T es incapaz de cumplir con los roles tradicionalmente atribuidos a la teoría de conjuntos: otorgar una fundación para la matemática y fungir como una herramienta útil para estudiar el concepto de “infinito”.
3. Si una teoría de conjuntos T no puede cumplir con los roles tradicionalmente atribuidos a la teoría de conjuntos, T no ofrece una teoría aceptable para apoyar alguna concepción de “conjunto” particular.
4. Muchas teorías paraconsistentes de conjuntos, específicamente NLP y sus variantes implicativas y mínimamente inconsistentes, son muy débiles.

A partir de esto, Incurvati concluye que:

Debilidad: teorías como LP y sus variantes implicativas y mínimamente inconsistentes no son teorías aceptables que apoyen la concepción ingenua de “conjunto”, en cuanto son demasiado débiles.

Incurvati es consciente de que esta objeción no afecta de manera directa a la concepción ingenua de “conjunto”. En lugar de ello, su impacto descansa en el (RMC). Dado que las teorías consideradas son débiles, son teorías inaceptables según los criterios expuestos por Incurvati y por lo tanto no son candidatas para ser *buenas* teorías de conjuntos adecuadas a la concepción ingenua. Argumentaré que la premisa 2 no expone un buen criterio para rechazar por completo una concepción de “conjunto” específica. Para ser muy preciso: argumentaré que la debilidad de una teoría no la hace inaceptable para capturar una concepción a partir de la premisa 2. En una oración simple: que una

teoría no sea tan buena como otras (que sea débil) no implica que sea una buena teoría de la concepción que pretende capturar. Esto muestra que la premisa 2 y el componente 2 de (RMC) tienen limitaciones en cuanto no son buenos criterios para rechazar una teoría de una concepción específica. Sin embargo, no retaré que la debilidad puede ser un criterio de comparación entre teorías, en general.¹⁹

Asumiré que el concepto de “conjunto” está determinado por las tres propiedades expuestas en la sección 1 y que diferentes concepciones son resultado de desacuerdos sobre el criterio de aplicación de dicho concepto. Entonces dos concepciones, C_1 y C_2 , se distinguen en cuanto a qué objetos *caen bajo* el concepto de “conjunto”. La forma natural de representar esto es: hay un objeto x tal que de C_1 se sigue que x es un conjunto, pero de C_2 se sigue que x no es un conjunto (o al menos no se sigue que lo sea). El problema es que “se sigue de” depende de la concepción, no del concepto de “conjunto”. “Se sigue de” es una noción lógica que no depende del concepto de “conjunto”, pues no hay, entre las propiedades asociadas con este, ninguna lógica asociada (a menos que haya una petición de principio). Sin embargo, es posible asociar nociones lógicas a concepciones en la medida de que implican la existencia o no de cierto conjunto; en este sentido, las concepciones presuponen ciertas reglas lógicas. La concepción ingenua es un buen ejemplo de ello tal cual está expuesta en la sección 1.²⁰

Si esto es así, entonces los roles de fundamento de la matemática y del análisis del infinito dependen también de las concepciones (al depender de las teorías de una concepción específica). Según la premisa 2 —y (RMC), en general—, si x es un objeto relevante para fundamentar la matemática o el concepto de “infinito” en C_1 , entonces que de una

¹⁹ Esto implica que el defensor de la concepción ingenua no tiene por qué aceptar (RMC), en particular el componente 2. Pues el defensor de la concepción ingenua puede ignorar la comparación entre teorías. Sin embargo, yo no optaré por tomar esta vía, simplemente sostendré que la debilidad es un criterio muy limitado para rechazar una teoría *per se*, sin comprometerme tampoco (por ahora) con que la comparación es inútil. Considero que es útil, pero de una forma no muy significativa, lo que expondré en la sección 5.

²⁰ Para ser preciso, si la concepción ingenua es distinta en el sentido de Incurvati, implica la existencia de un conjunto como el conjunto universal V . Esto como resultado de instanciar (Comp) con la propiedad $x = x$. Para que esto sea el caso, es necesario que la regla $\exists x\phi x \vdash \phi a$ (instanciación existencial) sea válida, entre otras. En este sentido, la concepción presupone ciertas reglas lógicas.

teoría (acorde a C_2 en este caso) no se siga que x es un conjunto implica que la concepción no cumple con los roles que se espera de una teoría de conjuntos. Me parece que esto es erróneo, pues lo más que se sigue es que teorías de las concepciones C_1 y C_2 ofrecen fundamentos de la matemática y análisis del infinito distintas.²¹ Para que el argumento funcione, debe haber una garantía de que la fundación de la matemática y el concepto de “infinito” son independientes de las concepciones. Pero si estos conceptos son independientes de las concepciones, entonces se corre el riesgo de cometer una petición de principio. Dado que las concepciones dependen de nociones lógicas distintas (a saber, “seguirse de”) y son relevantes para la fundación de la matemática y el análisis del infinito.

Esto es bien conocido y se presenta incluso en teorías de la concepción iterativa misma. Pongamos como ejemplo el caso de ZFC y de una teoría de conjuntos constructiva como CZF (Aczel y Rathjen, 2001). Ambas son teorías de la concepción iterativa, pero es bien sabido que el Axioma de Elección implica el principio de tercio excluso ($\neg \alpha \vee \neg \alpha$) (Diaconescu, 1975). En particular, en CZF, los ordinales no pueden estar linealmente ordenados (en el sentido de que para dos ordinales α y β , $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha \vee \beta$), pues implica tercio excluso (Aczel y Rathjen, 2001, secc. 9, prop. 9.2). A partir de resultados como este se ha sostenido que el análisis del infinito constructivo es sustancialmente distinto al análisis de ZFC, así como fundamentos distintos de la matemática. Y por supuesto, hay conjuntos que existen en ZFC que no existen en CZF; en este caso, los conjuntos relevantes son las funciones de elección sobre segmentos iniciales de ordinales arbitrarios. No pretendo sostener que ZFC y CZF no son parte de la misma concepción, sino que cuando se introducen nociones lógicas distintas, los análisis del infinito y el fundamento de la matemática son distintos. De ahí no se sigue que no se haga un análisis del infinito ni se ofrezca un fundamento de la matemática. Incurvati debe especificar claramente cuál es la matemática y el concepto de “infinito” que se deben analizar como un objetivo, sin cometer una petición de principio. Después de todo, se puede sostener que el análisis de infinito constructivo no es sobre el concepto de “infinito” en absoluto, o el

²¹ Esto no implica que los conceptos de “matemática” o “infinito” sean distintos. Es decir, mi argumento no es que el concepto de “matemática” o el de “infinito” dependan de las concepciones. Solo que los análisis de estos conceptos sí dependen de las concepciones.

defensor de la matemática constructivista podría sostener que el análisis de ZFC no es lo suficientemente restrictivo. En ambos casos se corre el riesgo de cometer petición de principio, si las objeciones únicamente se sostienen bajo el supuesto de que las teorías rivales no se comportan como deben. De la misma forma, CZF no puede ofrecer una fundación de la matemática clásica; si se pretende que así sea, se corre el riesgo de pedir la cuestión; pero CZF ofrece una fundación a la matemática constructiva.

Similares observaciones pueden ser sostenidas por el defensor de la concepción ingenua. E incluso de forma más pronunciada: si esto ocurre entre teorías de la misma concepción, entre teorías de concepciones distintas en naturaleza, es esperable que sea más pronunciada la diferencia. Las teorías inconsistentes también tienen conjuntos infinitos, por ejemplo, el conjunto universal satisface el axioma de infinito (cfr. Restall, 1992). A pesar de que no se pueda demostrar el teorema de Cantor, ello no implica que no haya una noción de “infinito” a estudiar. Sostener que esto no es suficiente supone que el análisis de “infinito” que se tiene como objetivo es independiente de las concepciones cuando estas suponen reglas lógicas de antemano (como argumenté en el párrafo anterior) y, como vimos, las reglas afectan el análisis de los conceptos matemáticos. Incurvati, en efecto, parece sostener que la matemática que se debe fundamentar es la matemática clásica, y el concepto de “infinito” es uno cercano al clásico. Desde los conceptos de Incurvati, es poco plausible especificar un concepto de “matemática” e “infinito” que permita que la premisa 2 sirva para rechazar concepciones (a partir de la evidencia expuesta al comienzo de la sección) sin cometer petición de principio contra el defensor de la concepción ingenua. La razón es que de antemano el defensor de la concepción ingenua no necesita tener como objetivo fundamentar la matemática y el concepto de “infinito” que Incurvati asume, dada su naturaleza. La concepción ingenua es radicalmente distinta de las concepciones que parecen sostener los objetivos que Incurvati tiene en mente, por lo cual es de esperar que la matemática y el infinito que analizan sean radicalmente distintos. A continuación, expondré varias razones para sostener esto.²²

La concepción ingenua pretende en su espíritu ser una concepción lógica de “conjunto”. Como tal, su objetivo es proporcionar una

²² Agradezco a un dictaminador anónimo por presionar en este argumento y ayudar a clarificarlo.

teoría de conjuntos de la idea de “conjunto” determinado por una condición o propiedad. De esto no se sigue que deba proporcionar las construcciones que garantizan la fundación clásica de la matemática o estudiar el concepto de “infinito” clásico. La pregunta es: ¿qué matemática se debe fundamentar? Un defensor de la concepción ingenua no requiere defender que los conceptos clásicos se pueden estudiar desde propiedades o condiciones lógicas, al menos no de la misma forma. Ciertamente los defensores contemporáneos de la concepción ingenua han tratado de garantizar estas construcciones. Sin embargo, la caracterización de la concepción (Priest, 2006b, p. 28) no depende de estas construcciones, a saber, la concepción fregeana de “conjunto” como extensión de propiedades.

El componente 2 de (RMC) se sigue más bien de la concepción iterativa (tal como la concibe Incurvati). Aunque Incurvati nunca lo enuncia de forma explícita, en varios pasajes parece asumir que una fundación de la matemática solo puede obtenerse a través de una noción puramente combinatoria de “conjunto”, o al menos con las construcciones garantizadas por una concepción de este tipo, como la iterativa. El tipo de fundación de la matemática que Incurvati tiene en mente depende precisamente de este tipo construcciones y la función que estas cumplen en una teoría de conjuntos (cfr. Incurvati, 2006, p. 178). En resumen, Incurvati sostiene que una teoría de conjuntos debe dar una fundación de la matemática al menos de manera similar a la fundación clásica, y esta depende de construcciones combinatorias. Sin embargo, las concepciones iterativas e ingenuas se diferencian en su naturaleza a este nivel fundamental. Por lo tanto, no es necesario que estos objetivos y virtudes de una deban ser satisfechos por la otra. Dado que la condición de Incurvati de fundamentación de la matemática no forma parte ni se sigue de la concepción ingenua, en ese sentido no tiene la utilidad esperada para comparar concepciones como la ingenua y la iterativa.

El propio Incurvati tiene plena consciencia de lo mencionado en el párrafo anterior y utiliza un argumento muy similar con respecto a otras concepciones. Considere la concepción iterativa y la concepción estratificada de conjunto.²³ Incurvati (2020, pp. 160-183) reconoce que la

²³ La concepción estratificada de “conjunto” es aquella defendida por Quine (1937) para la teoría conocida como *New Foundations (NF)*. La concepción sigue a la concepción ingenua en que un conjunto es determinado

concepción iterativa y la estratificada tienen pretensiones similares en términos de capacidad expresiva y como fundamento de la matemática. La diferencia es que el defensor de la concepción estratificada de conjuntos considera que (Comp) es correcto (aunque no todas las propiedades son legítimas). El punto que Incurvati sostiene es que NF es una teoría de *propiedades objetificadas* (en el mejor de los casos) y por lo tanto es una concepción lógica. Por este tipo de situaciones considera que la concepción estratificada no requiere de proveer de una fundación para la matemática:

Dado que NF es una teoría de propiedades objetificadas trata con estos asuntos. El hecho de que AC [Axioma de Elección] puede fallar para propiedades objetificadas no cantorianas, por lo que estas colecciones son inadecuadas desde un punto de vista fundacional, no es problemático, dado que esto no es para lo que esas colecciones son introducidas (Incurvati, 2020, p. 182).

Incurvati otorga diferente relevancia teórica al componente 2 de (RMC) para la concepción ingenua y la estratificada. Ambas son concepciones lógicas y tienen como objetivo (al menos secundario) la fundación de la matemática, pero este no se sigue de la caracterización de la concepción misma. Se podría decir que los conjuntos introducidos por una teoría ingenua no fueron introducidos para dar una fundación de la matemática clásica o del infinito. La razón que podría aducir Incurvati para distinguir estos casos es que la concepción estratificada no es compatible lógicamente con ser una teoría de conjuntos, a raíz de que es una teoría de propiedades objetificadas. Por ahora no me detendré a explicar este concepto (la relevancia de éste se discutirá en la sección 5); por ahora basta con decir que, desde el análisis de Incurvati, una propiedad objetificada no puede ser clásicamente un conjunto, pues ello implicaría inconsistencias. Por otro lado, la concepción ingenua sí puede serlo al no trivializar las inconsistencias. En consecuencia, el defensor de la concepción ingenua puede rechazar el supuesto clásico de que no puede haber teorías de conjuntos como propiedades objetificadas. Siendo compatible con la tesis sugerida por Incurvati de que las propiedades objetificadas no fundamentan la matemática clásica y por lo tanto, si una

por una propiedad; sin embargo, no utiliza la misma noción de “propiedad”: no toda fórmula determina una propiedad, solo las fórmulas *estratificadas*.

concepción descansa en este concepto, no requiere de fundamentar la matemática clásica. En consecuencia, no hay razón para esperar que una teoría de la concepción ingenua fundamente la matemática, de la misma forma que la teoría de la concepción estratificada no lo hace.

Se puede objetar que algunos de los problemas expuestos por Incuvarti no dependen de criterios combinatoriales como los resultados de Thomas (2014). Sin embargo, las condiciones descritas por Thomas para ser un conjunto unitario, producto cartesiano y orden lineal infinito sí dependen de su comportamiento en las teorías iterativas de conjunto, o al menos parecen motivados por los resultados que se obtienen en estas teorías. Thomas concluye de sus resultados que NLP no tiene ninguno de los conjuntos mencionados. Sin embargo, esta conclusión parece apresurada, pues sería análogo a sostener que CZF no tiene un concepto de “infinito” o de “ordinal”, lo cual no se puede concluir sin cometer petición de principio.²⁴ Thomas conoce la definición usual de “conjunto unitario” —a saber, $\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z = x)$ — y que la existencia de este conjunto se sigue de (Comp). El resultado de Thomas parece solo demostrar que el conjunto que se definió como unitario no siempre se comporta como el unitario clásico, lo cual no muestra la inadecuación de la definición usual de “conjunto unitario” o que lo que existe en una teoría paraconsistente de conjuntos no es un unitario.

Para concluir, me gustaría enfatizar que lo único que busco sostener aquí es que es erróneo considerar objetivos y virtudes de ciertas teorías para juzgar una teoría dependiente de una concepción esencialmente distinta. Pues de hacerlo se podría estar cometiendo petición de principio a menos que se muestre que estos objetivos y virtudes específicos son independientes de las concepciones o de alguna manera dependen del

²⁴ Se puede sostener que no es así, en vista de que el concepto de “infinito” y el de “ordinal” de ZFC y CZF son más cercanos que los que puede proveer NLP de “producto cartesiano” o “conjunto unitario” con respecto a ZFC. Sin embargo, esto no parece diferente a sostener que LP y la lógica clásica tienen menos similitudes que esta última con una lógica intuicionista; si esto es el caso, de nuevo se corre el riesgo de cometer petición de principio. No creo que lo sea. De cualquier forma, me parece irrelevante porque para que esto sea el caso se requeriría una noción minimal (que no cometa petición de principio) de todos estos conceptos que permita la comparación entre teorías. No conozco ninguno que no sean las definiciones de los conjuntos y el comportamiento de estas depende de la lógica.

concepto de “conjunto”. No estoy seguro de que esto sea plausible. Sin embargo, me parece que he expuesto razones suficientes para al menos poner en duda que la *debilidad* de las teorías ingenuas sea un problema, a pesar de no cumplir con estos objetivos. En cualquier caso, Incurvati puede sostener que mi argumento solo muestra que la debilidad de una teoría no implica su rechazo. Siguen sin ser buenas teorías de conjuntos en comparación con otras; ese es el objetivo de (RMC).²⁵ Asumiendo que está plenamente justificado el (RMC), el problema es que estas no son las únicas teorías de conjuntos inconsistentes existentes. Incurvati es consciente de esto y con respecto a estas teorías su argumento es que son *ad hoc* o no extensionales.

3. La objeción *Ad hoc* en las teorías inconsistentes

Hay teorías lo suficientemente fuertes para demostrar resultados esperados de la teoría de conjuntos. Incurvati sostiene que estas teorías carecen de una adecuada justificación en la medida en que sus lógicas carecen de esta, implicando que estas teorías son teorías de conjuntos *ad hoc*. Si no se ofrece una justificación para una teoría T independiente de que es capaz de demostrar resultados importantes de la teoría de conjuntos, entonces no muestra una solución convincente de las paradojas ni de la verdad de los axiomas de la teoría de conjuntos.

La elaboración de esta objeción es presentada por Incurvati principalmente en el marco de la estrategia relevante de Priest (2006b, p. 251): optar por una lógica de la relevancia para formalizar la teoría ingenua de conjuntos. A diferencia de muchas de las lógicas basadas en LP, las lógicas relevantes validan inferencias como el *modus ponens* y transitividad del condicional. La discusión se restringe a la teoría NLP; sin embargo, brevemente Incurvati considera preocupaciones similares relacionadas a $NLP \Rightarrow$ y la teoría de conjuntos basada en ella, NDLQ —cfr. Weber (2010b y 2012)—. Aquí desarrollaré algunos puntos que abarcarán otro tipo de aproximaciones relevantes, específicamente

²⁵ No pretendo rechazar (RMC) aquí, solo mostrar sus limitaciones. En este caso, solo sostengo que no es útil para rechazar una concepción. Pues no ser una buena teoría de conjuntos no implica que no sea una buena teoría de la concepción. Sin embargo, Incurvati solo pretende que muestre que comparativamente la concepción iterativa es mejor. En la sección 5, argumentaré que esto también tiene limitaciones.

aquellas que consideran las teorías NDKQ (Istre, 2017) y NsubDL (Badía y Weber, 2019 y Weber, 2021).

NLP: Incurvati señala un problema con los modelos expuestos por Restall (1992). Restall demuestra que en NLP hay dos conjuntos x y y tales que $x \neq y$, pero su prueba depende de definir $x = y$ como $\forall z(x \in z \leftrightarrow y \in z)$. Esta es una definición no estándar y requiere de una justificación más allá de permitir demostrar que “existen dos objetos distintos”.

NLP \Rightarrow : Priest, con el fin de invalidar en el condicional de (Ext) y (Comp) el principio de Contracción $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ (para evitar la paradoja de Curry) y las paradojas de la implicación material, opta por las lógicas de relevancia profunda. Así, propone la lógica NLP \Rightarrow , señalando que la conectiva de los axiomas conjuntistas debe ser $\alpha \rightarrow \beta$, definida como $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$, con el fin de garantizar contraposición. Sin embargo, sin una justificación de que la conectiva \rightarrow de los axiomas es una implicación, la introducción de esta lógica para estudiar la teoría de conjuntos es *ad hoc*.

NDLQ: esta teoría está basada en la lógica obtenida de DKQ —cfr. Istre (2017, pp. 24-25)—: más la regla de Contraejemplo: $\alpha, \neg\beta \Vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$, se le conoce como DLQ. Usando esta regla es posible demostrar una gran cantidad de resultados sobre números transfinitos, cardinales y ordinales, además del teorema de Cantor —cfr. Weber (2010b y 2012). Sin embargo, a menos que Weber justifique la inclusión de Contraejemplo, DLQ es *ad hoc*. Pues Contraejemplo no parece más válida que el silogismo disyuntivo.

Problemas similares a los presentados con respecto a NDLQ, se pueden presentar para teorías como NDKQ y NsubDLQ. La segunda, al igual que NDLQ, incluye la regla Contraejemplo y a la primera se le puede objetar que la inclusión de ciertos axiomas como tercio exclusivo

son igualmente *ad hoc* en la medida en que se introduce con motivo de validar la regla de reducción.

Con respecto al caso de NLP, hay poco que decir. La definición de “identidad” utilizada por Restall es poco intuitiva y no estándar; su uso requiere una justificación más allá del teorema en que se ocupa. Tal vez la única posible justificación es precisamente su capacidad demostrativa. Es posible justificar un principio con base en esto (como argumentaré más adelante). Sin embargo, mi argumento pierde relevancia en vista de que esta definición no es claramente un principio lógico y tiene una naturaleza distinta a los axiomas usuales de la teoría de conjuntos. Sin considerar el problema particular de NLP, la estructura general de la objeción se puede plantear de la siguiente forma.

1. La lógica subyacente de una teoría de conjuntos T carece de *justificación independiente* si no hay una justificación para algunas reglas distinta a su capacidad de demostrar ciertos teoremas.
2. Si la lógica subyacente de una teoría de conjuntos T carece de justificación independiente, entonces T en general carece de justificación independiente.
3. Si una teoría de conjuntos T carece de justificación independiente, entonces T es *ad hoc*.
4. Las lógicas LP \Rightarrow , DKQ, DLQ y subDL carecen de justificación independiente
5. Si T es *ad hoc*, entonces no es una teoría aceptable para apoyar una concepción de “conjunto” particular en comparación con la concepción iterativa.

A partir de esto, Incurvati concluye que:

Ad hoc: Las teorías NLP \Rightarrow , NDKQ, NDLQ y NsubDL no son teorías aceptables para apoyar la concepción ingenua en comparación con la concepción iterativa

La relevancia de esta objeción es tal que cooperaría a la defensa de la concepción iterativa —a través de (RMC)— solo si la concepción iterativa al menos no es tan *ad hoc* como estas teorías. Lo que voy a

argumentar es que la concepción iterativa está introducida de manera *ad hoc*, y de forma muy parecida a los casos expuestos arriba, aunque en un aspecto distinto al de la lógica subyacente de la teoría. Sin embargo, el caso de $NLP \Rightarrow$ parece no ser del tipo que exige este argumento. Ya que no cumple lo descrito en la premisa 1: la objeción no es precisamente el comportamiento inferencial de \Rightarrow , sino la lectura de los axiomas con esta conectiva. Por esto, propondré una forma de leer los axiomas que está íntimamente ligada al comportamiento inferencial de \Rightarrow , que sigue las intuiciones de Priest al proponer esta conectiva.

Las motivaciones de Priest para adoptar este tipo de operador de implicación rondan entre dos posibilidades: (1) que el condicional material presenta las paradojas de la implicación material y (2) que el operador de implicación debe garantizar verdad del antecedente al consecuente, y la falsedad del consecuente al antecedente. Pero en ningún caso se presenta una justificación para adoptar a la implicación como la conectiva de los axiomas (Ext) y (Comp).

Incurvati (2020, p. 116) pretende que exista cierta lectura de los axiomas conjuntista que exhiban que la conectiva que los rige es una implicación relevantista, lo que no se ha ofrecido en la literatura. Sin embargo, los defensores de la concepción ingenua pueden obtener una justificación indirecta, en la que de la lectura intuitiva del axioma se extrae la satisfacción de ciertas inferencias. Esto es precisamente lo que ofrece Priest: esta conectiva debe preservar verdad del antecedente al consecuente y falsedad del consecuente al antecedente. Esto no es solo una condición para el comportamiento lógico de la teoría de prueba: también se deriva de la lectura intuitiva de los axiomas. La razón por la cual se justifica (Comp), por ejemplo, es que los objetos que satisfagan una propiedad pertenecerían a un conjunto $A(\phi(x) \rightarrow x \in A)$ y, si algo no satisface la propiedad, no puede pertenecer a $A(\neg\phi(x) \rightarrow \neg x \in A)$. Una lectura análoga parece estar detrás de las intuiciones sobre (Ext). Incurvati conoce esta lectura y parece que su objeción se orienta al carácter intensional del condicional.

Al respecto, Priest ofrece dos justificaciones. La primera es que parte del contenido de la implicación es la *implicación lógica*, siguiendo a Anderson y Belnap (Priest, 2006b, p. 82). La segunda es asumir que la implicación debe validar el *modus ponens*. Por lo tanto, la implicación no puede ser el condicional material de LP, la lógica que Priest (2006b, p. 83) favorece. Con respecto a lo mencionado en el párrafo anterior, la condición de garantizar la verdad del antecedente al consecuente

implica que la conectiva en cuestión debe validar el *modus ponens*. Así, parece que la justificación de Priest para la estrategia relevante recae en las propiedades inferenciales de la conectiva deseada. Priest sostendría que en vista de que todas estas propiedades caracterizan una adecuada implicación, la teoría de conjuntos debe formalizarse con esta implicación. Esta, por supuesto, es una motivación *ad hoc*, en cuanto no hay razón independiente para \Rightarrow más que su comportamiento inferencial. El problema de $NLP \Rightarrow$ ahora tiene un parecido teórico al de las demás objeciones de Incurvati.

Los problemas de $NLP \Rightarrow$, $NDLQ$, $NDKQ$ y $NsubDL$ son similares: la justificación de estas teorías depende de la selección de inferencias lógicas que se consideren necesarias para capturar el contenido de la concepción ingenua de "conjunto". Es cierto que la elección del comportamiento lógico de estas teorías es *ad hoc*; sin embargo, no me parece más *ad hoc* que la elección que se ha hecho de los axiomas tradicionales de la teoría de conjuntos. Esto es relevante en vista del componente 1 de la idea de (RMC), pues requiere precisamente de una explicación de por qué los axiomas tradicionales de la teoría de conjuntos son verdaderos. Consideremos los axiomas de Z: los axiomas usuales de ZFC sin los axiomas de Elección y de Remplazo. El punto fundamental es que, desde su génesis, la axiomatización de Zermelo es *ad hoc* en un sentido fundamental. En la época en que Zermelo formuló su primera axiomatización de la teoría de conjuntos, era bien sabido que existían las paradojas de la teoría de conjuntos y que el principio problemático era (Comp). Aún más, era bien sabido que las construcciones que proveían a la teoría de conjuntos de la capacidad para fundamentar la matemática se justificaban con (Comp). En este contexto, Zermelo escribe:

En esas circunstancias no queda nada por hacer a este punto más que proceder en la dirección opuesta, empezar de la teoría de conjuntos como está históricamente dada, para buscar los principios necesarios para establecer los fundamentos de esta disciplina matemática. Para resolver el problema debemos, por un lado, restringir aquellos principios suficientemente para excluir todas las contradicciones y, por el otro, tomarlos de forma suficientemente irrestricta para conservar todo lo que es valioso en esta teoría. Ahora, en el presente artículo, muestro cómo la teoría entera creada por

Cantor y Dedekind puede ser reducida a unas cuantas definiciones y siete principios, o axiomas, que parecen ser mutuamente independientes. La pregunta, más bien filosófica, acerca del origen de estos principios y la medida en que son válidos no será discutida aquí (Zermelo, 1967, p. 200).

Zermelo postuló los axiomas tradicionales con la intención de evitar las paradojas de la teoría de conjuntos y la justificación para estos es específico simplemente es obtener ciertos teoremas de la teoría, lo cual es claramente *ad hoc*.²⁶ Es más, la restricción de (Comp), en (Sep), juega un papel destacable, pues esta es la que garantiza la solución a las paradojas y es la diferencia principal entre las teorías ingenuas y las iterativas a un nivel conceptual muy importante. En términos de Incurvati, (Comp) es un *axioma de naturaleza* en la concepción ingenua y (Sep) es un *axioma de grado* en la iterativa. Parece que la respuesta a la pregunta “¿por qué buscar explicar la verdad de estos axiomas?” consiste en su capacidad de reconstruir los resultados necesarios para la fundamentación de la matemática y el análisis del concepto de “infinito”. No conozco otra posible respuesta a esta pregunta, y no se me ocurre una que justifique todos los axiomas de Z y no solo los axiomas elementales.²⁷ Esto se puede aplicar a otras extensiones de Z como ZF o ZFC.

Volviendo a la justificación de Zermelo, esta parece muy cercana a los requisitos del proyecto paraconsistentista. En palabras de Priest: “Primero, la teoría resultante no debe permitirnos probar demasiado; segundo, no debe permitirnos probar muy poco” (Priest, 2006b, p. 248). Análogamente, volviendo a presentar la motivación de Zermelo: “restringir los principios suficientemente para excluir toda contradicción y, por el otro, tomarlos de forma suficientemente amplia para conservar todo lo que es valioso en esta teoría” (Zermelo, 1967, p. 200). En este punto, los proyectos son muy parecidos: encontrar una teoría lo suficientemente débil para evitar problemas derivados de las paradojas (ya sea inconsistencias o trivialidad), pero lo suficientemente fuerte para demostrar suficientes resultados ya establecidos. Incluso

²⁶ Este mismo punto ha sido expresado por Menzel (1986), quien también ha argumentado que ZFC no caracteriza la concepción iterativa.

²⁷ Con esto me refiero a los Axiomas de Vacío, de Par, de Unitario o de Unión, los cuales podrían tener un sostén intuitivo.

se podría agregar que dichos resultados parecen no depender de las inconsistencias derivadas de las paradojas. Más aún, los conceptos de “inconsistencia” y “trivialidad” son lógicos; así, en ambos casos el problema por solucionar es un problema lógico. La principal diferencia es que Zermelo seleccionó de forma *ad hoc* los principios convenientes de la teoría y el paraconsistentista (siguiendo a Incurvati) selecciona *ad hoc* los principios y reglas lógicas. Para concluir la analogía, ambos introducen criterios externos muy similares para juzgar adecuada la introducción *ad hoc* de sus herramientas específicas: pruebas ya establecidas sobre los conjuntos.²⁸

Para que la selección de inferencias sea evidencia específica contra el defensor de la concepción ingenua, Incurvati debe dar una justificación independiente a la capacidad demostrativa de los axiomas y que recaiga en la concepción iterativa (de forma especial), en específico de (Sep) (al ser la diferencia clara entre la concepción ingenua y Z). Sin embargo, como Incurvati mismo ha indicado, parece que los axiomas de naturaleza de la concepción iterativa son (Ext) y (Fundación), de los cuales no se puede obtener buena parte de los axiomas, los cuales casi todos son independientes. Lo que es más, demostrar (Sep) requiere del axioma de Remplazo (cfr. Amor Montaña *et al.*, 2011, p. 180). Además, muchos de estos axiomas son base de otras concepciones, como la concepción de “limitación de tamaño”. Esta, a diferencia de la iterativa, puede dar cuenta de (Sep)²⁹ de forma independiente pero, como Incurvati indica, no puede ofrecer una solución no *ad hoc* a las paradojas: la única forma de identificar una propiedad que genera conjuntos *muy grandes* es verificando si genera paradojas.

Si estas observaciones son correctas, las teorías ingenuas y ZFC parecen tan *ad hoc* como las teorías inconsistentes. La diferencia entre ambas es que Zermelo selecciona *ad hoc* construcciones conjuntistas y el

²⁸ Este problema se presenta para otras concepciones, como la concepción de “limitación de tamaño” evaluada por Incurvati. Esta concepción consiste, al igual que la ingenua y la estratificada, en preservar (Comp), pero no todas las propiedades son legítimas, de forma parecida a la concepción estratificada. La diferencia con esta última es que las propiedades ilegítimas son aquellas cuya extensión es *muy grande* para ser un conjunto.

²⁹ Puede hacerlo con criterios como tamaño o “un paso antes del desastre”, presentados por Maddy (1988a y 1988b).

paraconsistentista reglas y principios de la lógica. Lo que busco enfatizar es que el criterio *ad hoc* no permite comparar estas concepciones.

Se podría objetar que, efectivamente, tanto ZFC como las teorías inconsistentes son *ad hoc*, pero las segundas lo son en un sentido más elemental.³⁰ Pues, aunque en ambos casos la solución a las paradojas es *ad hoc*, seleccionar *ad hoc* las reglas y principios lógicos es más arbitrario que seleccionar *ad hoc* axiomas y construcciones de una teoría. Si esto es así, entonces las similitudes expuestas más arriba entre ambos casos no serían suficientes para determinar que en efecto ambas estrategias son *igualmente ad hoc*. La objeción es un tanto extraña, pues las inferencias que se busca seleccionar *ad hoc* me parecen poco cuestionables y clásicamente válidas. De nuevo, estas reglas se seleccionaron por las mismas razones por las que Zermelo consideró su selección de axiomas importantes: recuperar ciertas pruebas o teoremas. Si el punto es conservar cierta prueba o teorema, no entiendo por qué conservar las reglas lógicas sería más *ad hoc* o arbitrario que conservar los principios. Sin embargo, el problema no es este. La objeción asume que las premisas de una paradoja son diferentes en naturaleza, lo suficiente para que unas sean más fundamentales que otras, en el sentido de que seleccionar arbitrariamente unas es más problemático que seleccionar las otras. Una paradoja es un argumento que llega a una proposición indeseable (una contradicción o trivialidad, en este caso). Y como todo argumento, las paradojas tienen premisas. La objeción asume que estas premisas son de dos tipos distintos en cuanto uno de ellos es más fundamental que otras: (1) proposiciones específicas y (2) reglas lógicas. Creo que hay buenas razones para sostener que las segundas no son más fundamentales que las primeras en cuanto ambas juegan el mismo rol en una paradoja. La primera razón es que, históricamente, la lógica de hecho se ha revisado como cualquier principio no lógico (cfr. Priest, 2006a, pp. 164-167) y la apuesta del lógico no clásico es realizar una nueva revisión. La segunda razón es que una paradoja se puede ver como un teorema limitativo en el sentido de que es una familia de oraciones incompatibles entre ellas bajo ciertos parámetros. Pongamos el ejemplo del teorema (limitativo) de Gödel:

³⁰ Agradezco a un dictaminador anónimo por presentar este problema.

Teorema de Gödel (primera formulación): para toda teoría T que sea finitamente axiomatizable y su lenguaje es recursivamente enumerable, si T es consistente, entonces T es incompleta.

Aunque esta es la formulación tradicional, hay otras formulaciones equivalentes:

Teorema de Gödel (segunda formulación): para toda teoría T que sea finitamente axiomatizable y su lenguaje es recursivamente enumerable, si T es completa, entonces T es inconsistente.

Teorema de Gödel (tercera formulación): para toda teoría T que sea finitamente axiomatizable y su lenguaje es recursivamente enumerable, o bien T es incompleta, o bien T es inconsistente.

¿Cuál de ellas es la formulación correcta? Dado que son equivalentes, parece que la respuesta es que todas lo son. Sin embargo, también parece que la tercera sugiere que el problema del teorema de Gödel es más profundo que la pregunta por su formulación correcta. El problema es que las siguientes oraciones son incompatibles a riesgo de trivialidad (parámetro de incompatibilidad). Sea T una teoría:

1. T es finitamente axiomatizable.
2. El lenguaje de T es recursivamente enumerable.
3. T es completa.
4. T es consistente.
5. Una familia de inferencias lógicas que permiten derivar de 1-4 el parámetro de incompatibilidad.

Alguna deberá rechazarse si se pretende que la teoría no sea trivial (el parámetro de incompatibilidad). Se puede optar por la misma presentación en el caso de las paradojas teórico-conjuntistas de una forma mucho más simple:

1. $\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \phi(z))$ (Comp).
2. Φ es una fórmula del lenguaje de primer orden con el predicado no lógico \in , con máximo una variable libre.
3. Una familia de inferencias lógicas que permiten derivar de 1-2 el parámetro de incompatibilidad.

De nuevo, el parámetro de incompatibilidad es la trivialidad. Mi argumento muestra que, si las teorías inconsistentes son *ad hoc* sobre 3, Z lo es sobre 1, en cuanto son *ad hoc* sobre alguno de los supuestos incompatibles de un teorema limitativo. Es verdad que son de naturaleza distinta; sin embargo, el rol que juegan en el teorema es el mismo y ambos son igualmente revisables. Además, la motivación para revisarlas es la misma. Y en este sentido, como solución a las paradojas teórico conjuntistas, dar una solución *ad hoc* sobre la lógica es igualmente problemático que dar una solución *ad hoc* sobre los axiomas de la teoría de conjuntos. Ciertamente se puede sostener que la lógica tiene un estatus diferente a la de los axiomas de una teoría matemática, pero para comparar soluciones a las paradojas no es necesario comprometerse con ello. Además, la oración 3 no requiere compromiso con un sistema lógico en general, únicamente con la validez de ciertas inferencias.

4. La objeción Extensionalidad en las teorías inconsistentes de conjuntos

El último problema que señala Incurvati es que las teorías inconsistentes de conjuntos corren el riesgo de no ser teorías de conjuntos en absoluto, a raíz de un problema bien conocido de las teorías de conjuntos basadas en una lógica relevante (las llamaré *teorías de conjuntos relevantes*). Consideremos un conjunto A y el conjunto $B = \{x \mid x \in A \wedge \alpha\}$, donde α es una verdad arbitraria. Intuitivamente, A y B tienen los mismos elementos y por lo tanto deberían ser el mismo conjunto ($A=B$). Sin embargo, por (Ext), para demostrar esto, es necesario demostrar $x \in A \leftrightarrow (x \in A \wedge \alpha)$. Pero $x \in A \rightarrow x \in A \wedge \alpha$ no es válido (en general) en una lógica relevante (cfr. Incurvati, 2020 y Priest, 2006b). El mismo problema se presenta para demostrar que los conjuntos $V = \{x \mid \exists y (x \in y)\}$ y $U = \{x \mid x = x\}$ tienen los mismos elementos, pues $\exists y (x \in y) \rightarrow x = x$ no es válido en lógicas relevantes (cfr. Weber, 2010a)

(por ejemplo, $V-U$). Es fácil ver que ambos son resultado de que la regla de Debilitamiento ($\Gamma, A \Vdash \Gamma, B \rightarrow A$) la que es considerada una paradoja de implicación material. Debido a que Incurvati sostiene que parte del concepto de “conjunto” es que dos conjuntos deben ser idénticos si tienen los mismos elementos, entonces estas teorías no serían realmente teorías de conjuntos. Incurvati obtiene esta parte del contenido del concepto de “conjunto” a partir de (Ext).

La objeción en general es la siguiente:

1. El criterio de identidad del concepto de “conjunto” es que “los conjuntos deben ser idénticos, si tienen los mismos miembros” (Incurvati, 2020, p. 11). Y esto está reflejado en el axioma (Ext).
2. Si una teoría T no puede garantizar 1, entonces T no es una teoría de conjuntos.
3. Las teorías de conjuntos relevantes no pueden garantizar 1 por los ejemplos de $A-B$ y $U-V$.

A partir de esto, Incurvati concluye que:

Extensionalidad: las teorías de conjuntos relevantes no son teorías de conjuntos

Mi respuesta está orientada a rechazar 3. Tradicionalmente se ha leído (Ext) al menos de dos formas: (1) como la afirmación de que los conjuntos están completamente determinados por sus elementos y (2) como un criterio de identidad de un conjunto. Incurvati adopta la segunda lectura del axioma, por lo cual (Ext) establece condiciones suficientes para la identidad de un conjunto y sirve para establecer la identidad conjuntista. Weber ofrece una respuesta al problema mencionado que no viola la idea de (Ext) como criterio de identidad. Weber demuestra que NDLQ es trivial si adopta una definición entimemática de la implicación de DLQ: $\alpha \mapsto \beta \equiv_{\text{def}} \alpha \wedge t \rightarrow \beta$, donde t pretende ser una constante que represente todas las verdades actuales y que cumple con la condición $\alpha \dashv\vdash t \rightarrow \alpha$. La motivación de esta implicación es que las extensiones (o el carácter extensional de los conjuntos) son indiferentes al contexto, por lo cual es suficiente indicar que el contexto en que se consideran es el contexto universal (cfr. Weber, 2010a, p. 96). El diagnóstico del problema que ofrece Weber es que al usar (Ext) en una lógica relevante

se está pretendiendo capturar propiedades extensionales mediante un operador intensional (\leftrightarrow) de DLQ (cfr. Incurvati, 2020, p. 119 y Weber, 2010a, pp. 88-90). Usando esta implicación, Weber define la contención entre dos conjuntos, A y B , como $A \sqsubseteq B \equiv_{\text{def}} \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ y con esto definir un principio de extensionalidad $A \sqsubseteq B \wedge B \sqsubseteq A \leftrightarrow A \equiv B$. y con esto definir un principio de extensionalidad. Intuitivamente, $A \equiv B$ afirma que A y B son coextensionales. Con esto, Weber demuestra que las intuiciones iniciales sobre V y U se validan con respecto a \sqsubseteq y \equiv : $\forall x(x \in V)$, $\forall x(x \in U)$ (i. e. V y U son universales) y que $V \equiv U$. De la misma forma, Weber demuestra que $A \equiv B$ para A y B en el ejemplo A - B . El problema es que NDLQ, con estas nuevas operaciones de contención y coextensionalidad, resulta ser trivial, apoyado en un principio de sustitución basado en la coextensionalidad: $A \equiv B \vdash \Phi(A) \rightarrow \Psi(B)$. Para Weber, la trivialidad proviene de este principio en cuanto lo que pretende es insistir en tratar como identidades a la coextensionalidad. No es sorprendente que sea trivial esta teoría, pues se está insistiendo en capturar intuiciones sobre el carácter extensional de un conjunto en una lógica con operadores intensionales para determinar el funcionamiento de (Ext), pero eso no se puede esperar en general.

Weber sostiene sobre el caso de U y V :

Es solo un problema si son realmente el mismo objeto. ¿Lo son? Mientras U y V tienen a todo objeto como miembro, no son el mismo conjunto, incluso extensionalmente. Tienen diferentes miembros. [...] Es demostrable que algunos objetos no están en U , pero sí en V . Esta diferencia es una consecuencia de la conexión en la lógica entre intensionalidad y extensionalidad; esta diferencia es una consecuencia del concepto de conjunto. La identidad $U = V$ solo ‘se pierde’ si teníamos que tenerla desde el comienzo. Más bien, U y V no son el mismo conjunto. Vale la pena recordar que, después de todo, clásicamente hablando ninguno es un conjunto (Weber, 2010a, p. 101).

Con esto, Weber simplemente toma la misma lectura que Incurvati de (Ext) usándolo como un criterio de identidad conjuntista. ¿Qué conclusión se obtiene entonces? Que efectivamente U y V no son el mismo conjunto, pues no tienen los mismos elementos: el conjunto de Russell, R , no es idéntico a sí mismo ($R \neq R$) y por lo tanto $R \notin U$. Así, el

ejemplo se puede neutralizar bajo los mismos parámetros que Incurvati usa. Siguiendo todo esto, el conflicto entre U y V parece ser un conflicto de intuiciones más que un conflicto derivado del concepto mismo de “conjunto”.

Sin embargo, esta respuesta no permite explicar el caso de $A-B$. Incurvati señala que Weber utiliza una respuesta distinta para este caso y parece que la diferencia entre ambos casos de estudio es el hecho de que en el caso de U y V se muestra un elemento que los distingue; R , lo cual no es posible hacer para el caso de $A-B$. Para este caso, la respuesta de Weber consiste en señalar que la coextensionalidad de A y B depende de que α sea simplemente verdadera, pero si fuese además falsa B no sería coextensional con A . Por lo que, según Incurvati (2020, p. 120), la teoría sigue sin poder demostrar la coextensionalidad de A y B incluso en el caso de que α sea simplemente verdadera. Esto es falso, dado que Weber efectivamente muestra la coextensionalidad de A y B en casos donde α es verdadera:

- Si α es simplemente verdadera, debemos demostrar $A \sqsubseteq B$, es decir, $x \in A \wedge t \mapsto x \in A \wedge \alpha$, lo que es verdad.
- Si α es también falsa, sea $x \in A$; como α es falso, entonces es falso $x \in A \wedge \alpha$. Por lo tanto, $x \in A$. En consecuencia, $\neg(A \equiv B)$.

Ahora bien, Weber finalmente concluye que: “Cualquier falla de extensionalidad, entonces, se resuelve al tener en cuenta que la teoría de conjuntos paraconsistente no es clásica. Comportamiento no clásico no es lo mismo que comportamiento no extensional, porque ser clásico no es lo mismo que ser correcto” (Weber, 2010a, p. 101).

Weber podría argumentar entonces que muchas propiedades que podemos atribuir a los conjuntos se *pierden* al nivel de las teorías mismas. Hay que distinguir entre (Ext) como criterio de identidad y (Ext) como el reflejo *transparente* de ciertas intuiciones sobre el carácter extensional de los conjuntos. Si bien (Ext) se puede entender como una pretensión de recuperar la intuición de que dos conjuntos con los mismos elementos son idénticos, lo que afirma el axioma efectivamente en una teoría depende de la lógica que se use para formalizar la teoría. Por lo cual puede diferir de la intuición inicial sobre los conjuntos y puede tener consecuencias muy distintas a las que intuitivamente se esperaría tener. Incurvati no

diferencia entre ambas funciones de (Ext): si (Ext) puede funcionar como criterio de identidad es porque puede reflejar en la teoría las intuiciones que tenemos sobre los conjuntos. (Ext) sigue funcionando en la teoría como criterio de identidad, aunque las propiedades extensionales de los conjuntos no son las mismas.

Siguiendo esto, se podría defender que los axiomas de la concepción ingenua de conjuntos formalizados en la lógica adecuada están reflejando un concepto distinto de “conjunto”, en el que nuestras intuiciones tienen una carga distinta. En este caso, la naturaleza extensional de los conjuntos no tiene las propiedades que se pensaba, pues el contenido de $A = \{x \mid \phi(x)\}$ y $B = \{x \mid \phi(x) \wedge \alpha\}$ son distintos. Un matemático comprometido con una lógica relevante y la concepción ingenua bien podría argumentar que este fenómeno no es sorprendente, ya que (Ext), formalizado en esta teoría, implica que no es suficiente que ambos conjuntos tengan los mismos elementos para ser idénticos (como indican nuestras intuiciones), sino que además debe haber una relación (*relevante*) entre las condiciones que los determinan para poder ser idénticos. Nótese que tampoco implica que (Ext) no sea un criterio de identidad, porque esta relevancia entre las condiciones que lo determinan está capturada en la conectiva de implicación. Siguiendo un poco el espíritu de la cita de Weber presentada más arriba, NDLQ es efectivamente una teoría no clásica de conjuntos y su comportamiento es no clásico. Weber puede aceptar que, en cuanto estos conjuntos satisfacen (Ext), se está estudiando objetos extensionales; después de todo, este sigue siendo el criterio de identidad. Sin embargo, no todas las propiedades que se creían derivadas del carácter extensional de los conjuntos realmente lo son en una teoría inconsistente de conjuntos. Pero eso no implica que estos conjuntos no sean entidades extensionales en sí mismas.

Este tipo de respuestas corren el riesgo de ser sumamente parecidas a aquellas que desde la concepción iterativa se defienden para el caso de V u ORD (lo cual, para el defensor de la concepción ingenua, sería un defecto): se excluyen conjuntos o proposiciones únicamente por lo problemáticos que son para la teoría. Mientras la concepción iterativa rechaza el carácter conjuntista de algunos objetos intuitivamente conjuntistas, la respuesta expuesta aquí está rechazando una propiedad extensional intuitiva de los objetos y en ambos casos la razón es sostener el éxito de la teoría. Esto implica que ambas concepciones son igualmente

ad hoc (de nuevo).³¹ Cómo mencioné, esto es poco cooperativo a los objetivos del defensor de la concepción iterativa; sin embargo, siguiendo el tipo de razonamiento de la sección anterior, la concepción ingenua se encuentra en una circunstancia muy parecida a la concepción iterativa. En ese caso, lo que queda es investigar qué concepción tiene un mayor sustento independiente.

5. ¿Tiene la concepción iterativa mejor sustento independiente que la ingenua?

Hasta ahora he tratado de dar razones para mostrar que las críticas de Incurvati a las teorías inconsistentes de conjuntos no ofrecen problemas tan trascendentes como parecería. A continuación, explicaré cuál es la fuente del criterio (RMC) y la importancia en el argumento de Incurvati a favor de la concepción iterativa para hacer patente la relevancia de las respuestas expuestas en las últimas tres secciones.

Incurvati busca defender la concepción iterativa y es consciente de las objeciones que se han puesto a esta, particularmente por Priest (2006b, pp. 39-49). Priest presenta dos objeciones a la concepción iterativa: (1) la objeción de explicación ausente (en los términos de Incurvati, 2020, p. 71) y (2) la objeción de justificación independiente.

Priest expone la objeción (1) de la siguiente manera: “Si las únicas instancias de (Abs) [(Comp), en este artículo] que son verdaderas fueran aquellas que se sostienen en la jerarquía cumulativa, nuestra suposición ingenua de que todas las condiciones definen conjuntos parecería inexplicable” (Priest, 2006b, p. 31). La objeción asume que la motivación de la concepción ingenua de “conjunto” es intuitivamente verdadera, o al menos se sustenta adecuadamente en una intuición. Si esto es así, el defensor de la concepción iterativa debe explicar por qué (Comp) es más intuitivo (o convincentemente verdadero) en contraste con (Sep).

³¹ Nótese que el defensor de la concepción ingenua puede sostener que es más problemático rechazar la existencia de ciertos conjuntos que intuiciones no formales, particularmente cuando dichos conjuntos tienen definiciones y propiedades formales. Creo que esta respuesta es sumamente vaga y apela a intuiciones que pueden ser igualmente problemáticas. Considero que ambas respuestas son igualmente *ad hoc*. En general, considero poco útil comparar qué tan *ad hoc* es cierta estrategia para resolver un problema: si una teoría es *ad hoc*, es *ad hoc*. Comparar dos teorías en este aspecto genera más problemas que soluciones.

Incurvati da una explicación de lo intuitivo que es (Comp) a través de la noción de “propiedad objetificada”. Según Incurvati, “nuestra intuición de que toda instancia del esquema de Comprensión se sostiene es el resultado de confundir dos conceptos diferentes, el concepto de ‘conjunto’ y el concepto de ‘propiedad objetificada’ —un objeto sistemáticamente asociado a una propiedad—” (Incurvati, 2020, p. 75). Los conjuntos son colecciones combinatorias y las propiedades objetificadas son colecciones lógicas. El problema es, pues, que (Comp) confunde dos conceptos distintos y eso implica problemas en la forma de paradojas. Incurvati (2020, p. 27) sostiene que las paradojas que se derivan de asumir que el concepto de “conjunto” satisface las siguientes propiedades:

Extensión indefinida: un concepto C es *indefinidamente extendible* si y solo si siempre que logremos definir una colección u de objetos que caen bajo C , hay una operación que, dado u , produce un objeto que cae bajo C pero no pertenece a u .

Universalidad: un concepto C es *universal* si y solo si hay un conjunto de todas las cosas que caen bajo C .

(Comp) es (erróneamente) intuitivo porque no reconoce que el concepto de “conjunto” satisface Extensión indefinida pero no Universalidad, lo que la concepción iterativa sí reconoce.³² Sin embargo, esto no ayuda a la concepción iterativa, pues el defensor de la concepción ingenua puede insistir en que el concepto de “conjunto” de hecho satisface ambas, y por eso (Comp) es intuitivo. El defensor de la concepción ingenua no tiene que aceptar la distinción entre conjunto y propiedad objetificada, sosteniendo que lo que se busca es analizar el

³² Incurvati sostiene que NF, por ejemplo, es una teoría de propiedades objetificadas en cuanto sostiene que sus objetos satisfacen Universalidad (pero no Extensión indefinida), por lo que no requieren ofrecer una fundación de la matemática, y no viola (RMC). Nótese que Universalidad es lo que determina a una propiedad objetificada, no la no satisfacción de Extensión indefinida. Por lo cual el argumento que se ofreció en la sección 2 sobre la comparación entre la concepción estratificada y la ingenua se sostiene, pues la concepción ingenua sostiene Universalidad también.

concepto de “conjunto” a través de su relación con las propiedades.³³ Sin embargo, las razones para suponer que el concepto de “conjunto” no satisface Universalidad recaen en considerar a las inconsistencias un problema para el desarrollo de un concepto. Si el argumento solo dependiera de ello, constituiría una petición de principio contra el defensor de la concepción ingenua.

El argumento de Incurvati solo logra sostener que el defensor de la concepción iterativa puede explicar mediante esta estrategia la intuición a favor de (Comp). El éxito de esta explicación descansa en los presupuestos de haber establecido que la concepción iterativa es la *correcta*, que el diagnóstico de las paradojas es correcto y que la lógica clásica es la correcta para el concepto de “conjunto”. En general se puede decir que este diagnóstico es bien conocido y defendido —por ejemplo, Dummett (1991)—, incluso por el defensor de la concepción ingenua —Priest (1995) y Weber (2021)—. En este punto el defensor de la concepción ingenua y el de la iterativa se encuentran en una igualdad de circunstancias en cuanto cada uno tiene una lógica que le permite explicar el éxito de su explicación a las paradojas y sostener su concepción de “conjunto”. Por lo cual, lo que queda es argumentar que la concepción iterativa es la concepción *correcta* de “conjunto”.

Con la situación en igualdad de circunstancias, revisaré la segunda objeción de Priest a la concepción iterativa. La objeción sobre la justificación independiente de Priest es presentada de la siguiente manera:

La tesis de que los únicos conjuntos son aquellos en la jerarquía no tiene justificación independiente. [...] El intento común para justificar la tesis es parecido a lo siguiente: “Es fundamental a la teoría de conjuntos el concepto de ser capaz de considerar cualquier colección de objetos como una unidad simple. Pero antes de poder formar una colección de objetos, aquellos objetos deben primero estar ‘disponibles’ para nosotros... Antes de poder construir los conjuntos como objetos, debemos tener los conjuntos de objetos a partir de los cuales construir estos conjuntos. La palabra crucial aquí

³³ De hecho, un argumento similar es sostenido por Weber (2021, pp. 34-35), sin comprometerse con la distinción.

es, por supuesto, ‘construir’. Naturalmente no estamos pensando en *construir realmente* conjuntos en ningún sentido, pero nuestra teoría de conjuntos debería reflejar esta idea” [Devlin, 1980, p. 43]. El argumento emplea una metáfora temporal de conjuntos llegando a la existencia solo después de sus miembros. Sin embargo, la metáfora temporal está bastante fuera de lugar. Los conjuntos no están contruidos en el tiempo, y la metáfora de construir conjuntos de abajo hacia arriba, digamos, desde el conjunto vacío, no es mejor que la metáfora inversa de construir conjuntos de arriba hacia abajo, digamos, desde el conjunto universal, como se podría construir una cadena construida desde una viga (lo que obviamente permitiría conjuntos no bien fundados). Si tratamos de afirmar la tesis central en términos no metafóricos, sería algo como esto: un conjunto es conceptualmente posterior a sus miembros. Es difícil dar cualquier sentido claro a esta tesis, pero incluso si pudiésemos, no se seguiría que todos los conjuntos son bien fundados; pues no hay razón por la cual esta dependencia no debería extenderse “hacia atrás” indefinidamente. Por exactamente la misma razón, el argumento cosmológico para la existencia de Dios, al cual este argumento se parece bastante, es falaz (Priest, 2006b, pp. 31-32).

La idea fundamental es que la concepción iterativa requiere de una justificación para la afirmación de que un conjunto depende conceptualmente de sus miembros. Con esta justificación, es posible dar cuenta de la necesidad de niveles de una jerarquía. Sin embargo, como Priest indica, dar cuenta de esto parece difícil. Incurvati analiza tres posibles formas de dar cuenta de ello: la respuesta constructiva (Incurvati, 2020, § 2.3), la respuesta platonista (Incurvati, 2020, § 2.4) y la respuesta estructuralista (Incurvati, 2020, § 2.5). No explicaré el análisis de Incurvati de cada una; sin embargo, su conclusión es que ninguna de estas propuestas está exenta de problemas. Lo que es más, cada una parece recaer en conceptos menos elementales que la noción original de “dependencia”. La respuesta a este problema es lo que Incurvati llama la *explicación minimalista*:

La explicación minimalista consiste en dos componentes principales: una propuesta de cómo la concepción iterativa es entendida, que puede llamarse la presentación minimalista de la concepción iterativa; y una propuesta de por qué la concepción iterativa así entendida será considerada como la correcta, que, por razones que serán claras después, referiré como razonamiento a la mejor concepción (Incurvati, 2020, p. 61).

Con respecto al primer componente, Incurvati (2020, pp. 62-64) señala que hay una forma clara de entender la concepción iterativa más la tesis minimalista de no requerir explicar la dependencia metafísica de un conjunto con respecto a sus miembros. El segundo componente es (RMC): “consideramos la concepción correcta porque es la más satisfactoria concepción de conjunto que tenemos” (Incurvati, 2020, p. 65).

El problema es que la explicación minimalista está propuesta como una solución a la objeción de la justificación independiente. A pesar de que Incurvati no expone este problema como una objeción a la concepción iterativa, ciertamente sí exhibe que no puede haber dicha justificación independiente o al menos, que no tenemos ninguna exitosa por el momento. La explicación minimalista, lejos de ofrecer una justificación independiente, presupone que la concepción iterativa está lo suficientemente clara y en eso recae su justificación (a raíz del primer componente de esta), lo cual no pienso discutir aquí. Sin embargo, es claro también que esto no es suficiente para compararla con otras concepciones ni ofrece criterios para juzgarla mejor a otras concepciones. Por esto Incurvati introduce (RMC). La forma en que Incurvati argumenta a favor de que la concepción iterativa es correcta es esencialmente (RMC). Incurvati pretende defender que la mejor forma de argumentar a favor de la concepción iterativa es mostrando que es la concepción que puede ofrecer una mejor teoría de conjuntos explotando sus cualidades.

Si mis observaciones en las secciones 2, 3 y 4 son correctas, entonces no se ha establecido que la concepción iterativa sea mejor que la concepción ingenua, e incluso carece de justificación independiente. En la sección 2 hice una serie de observaciones para considerar que no es posible rechazar una teoría inconsistente, en virtud de no tener virtudes clásicas. Sin embargo, no objeté que la debilidad de las teorías inconsistentes era

un defecto en comparación con ZFC. Pero no todas son débiles, y si mis argumentos en las secciones 3 y 4 son correctos, hay al menos una teoría de la concepción ingenua que se encuentra en igualdad de circunstancias con las clásicas bajo los parámetros de Incurvati: NDLQ o NsubDLQ. El problema es que entonces, por lo argumentado en esta sección, estas defienden una concepción con justificación independiente y las iterativas no. La concepción ingenua parece ser más adecuada entonces. Con esto no busco argumentar que la teoría de conjuntos tradicional no tiene un punto a favor a raíz de su utilidad y capacidad matemática, simplemente que (RMC) no es capaz de establecer la corrección irrestricta de la concepción iterativa en comparación con la concepción ingenua. Metodológicamente, apelar a (RMC) es poco útil para establecer la corrección de la concepción iterativa.

¿Hay razones para considerar a la concepción iterativa como la correcta? Las razones para esto requieren, por supuesto, de dar cuenta de qué significa que un conjunto sea dependiente de sus miembros. Siguiendo a Incurvati, creo que esto no es tarea fácil, sobre todo porque esto implicaría la introducción de nuevos elementos teóricos más controvertidos que la idea de “dependencia”. Me parece que la idea de Incurvati es correcta: la mejor justificación para la concepción iterativa es precisamente su éxito como teoría matemática y que hay suficiente claridad en la idea de “dependencia”. Sin embargo, creo que es un error creer que es posible establecer que la concepción iterativa es mejor que otras a partir de esto. Es simplemente equivalente a decir que es la más utilizada, lo cual bien puede ser un accidente histórico o sociológico. No rechazar una concepción no implica afirmar que es correcta, que es lo que sostengo: la concepción iterativa tiene su importancia incuestionable como teoría matemática justificada, pero esto no puede implicar que sea la concepción correcta de “conjunto”.

5.1 ¿Cómo defender la concepción ingenua?

Si asumimos que lo mencionado anteriormente es correcto, aún queda pendiente un argumento a favor de la concepción ingenua de “conjunto”. Después de todo, como vimos en las secciones 3 y 4, lo que podemos afirmar es que la concepción ingenua está tan justificada conceptualmente como la concepción iterativa. Sin embargo, creo que la concepción ingenua tiene una ventaja con respecto a la concepción iterativa, al menos lo suficiente para que se considere valioso continuar su análisis. La situación puede resumirse de la siguiente manera: ambas

parecen ser igualmente *ad hoc* y con capacidad demostrativa similar (en el mejor de los casos para ambas), pero la concepción iterativa carece de justificación independiente y la concepción ingenua no. El proponente de la concepción ingenua rechazaría la diferencia sustancial entre conjunto y propiedad objetificada ofreciendo un análisis del concepto de “conjunto” a través de propiedades, reflejado en una teoría matemática. Con esto, el defensor de la concepción ingenua sostiene que un conjunto efectivamente satisface Extensión indefinida y Universalidad, lo cual naturalmente genera inconsistencias. Las paradojas de la teoría de conjuntos son simplemente teoremas de la teoría. De esto podemos establecer criterios externos para juzgar las virtudes de una teoría inconsistente de “conjunto”, relacionada a su capacidad de ofrecer resultados interesantes (a nivel matemático) de la noción de “propiedad”. De momento sugeriré uno que se considera fundamental en la literatura y que está íntimamente relacionado a la concepción iterativa.

En la discusión de la sección 3 se presentó la axiomatización de Zermelo como una *selección* de los principios necesarios para la fundamentación de la matemática; estos tenían una justificación en (Comp). Si esto fue así, entonces se puede considerar a los axiomas de ZFC no solo como compatibles con la concepción ingenua, sino como parte de ella. Incurvati parece suponer cierto tipo de incompatibilidad entre la concepción ingenua y la iterativa (como sugiere su discusión sobre la noción de “conjunto” y la de “propiedad objetificada”). Sin embargo, no es así, y esto es una virtud de la concepción ingenua, aunque no es una exigencia u objetivo. En esa misma discusión, Incurvati sostiene que la concepción iterativa es una concepción combinatoria de conjunto mientras que la ingenua es una concepción lógica, lo que genera tensiones entre ambas concepciones traducidas en inconsistencias. Sin embargo, si se opta por no considerar las inconsistencias como problemas o tensiones, la concepción ingenua podría ser capaz de dar cuenta de las propiedades combinatorias conjuntistas expresadas en los axiomas de ZFC. El defensor del proyecto paraconsistentista ha expresado esta intuición en diversas ocasiones —por ejemplo, Weber (2010b, p. 71 y 2012, p. 269)—. La concepción ingenua es esencialmente una concepción lógica, pero esto no descarta su capacidad de expresar propiedades y virtudes combinatorias. Esto se expresa en el teorema 6 de Restall (1992, p. 427) o en los resultados de Weber (2012). Con esto no quiero decir que una teoría de conjuntos ingenua debe perseguir estos resultados. Sin embargo, sí exhiben una virtud conceptual de la

concepción ingenua, que se puede expresar como la idea de establecer una relación conceptual entre concepciones distintas a nivel matemático y lógico.

Es en este sentido que el objetivo de Recaptura del proyecto paraconsistentista puede considerarse una virtud posible, pero no un auténtico objetivo y exigencia de las teorías inconsistentes. Siguiendo estas observaciones, podemos ver que las operaciones conjuntistas clásicas son casos de propiedades, lo cual puede ser un avance conceptual y nos permite pensar qué otras operaciones se pueden construir. De nuevo, al menos establece la relevancia de seguir investigando esta forma de entender el concepto de “conjunto”.

6. Conclusiones

He argumentado que las objeciones ofrecidas por Incurvati son equivocadas, o al menos no tienen la relevancia pretendida por él. Argumenté que la aparente debilidad de algunas teorías inconsistentes de conjuntos no es un problema para el defensor de la concepción ingenua en vista de que los resultados esperados por Incurvati y su criterio de razonamiento a la mejor explicación no deben esperarse de una teoría inconsistente, además de que exigirlos es atribuir objetivos que estas teorías no necesitan aceptar. Por otro lado, argumenté que las teorías inconsistentes de conjuntos son tan *ad hoc* como las teorías basadas en la axiomatización de Zermelo, por lo cual este tipo de característica no sirve para establecer la corrección de la concepción iterativa. Finalmente, argumenté que puede haber una forma de explicar el carácter extensional de los conjuntos a pesar de evidencia aparente de lo contrario. Con esto mostré que las objeciones de Incurvati no tienen el impacto esperado. Por otro lado, hacia el final de este trabajo argumenté que a partir de estas respuestas podemos concluir que el criterio de razonamiento a la mejor concepción no cumple con la función esperada por Incurvati y que incluso reduce el apoyo independiente de la concepción iterativa.

La distinción de Incurvati entre “concepto” y “concepción” nos permite sostener que las concepciones estudian propiedades distintas del concepto de “conjunto”. Pero de ello no se sigue que sea de ninguna manera fructífero comparar concepciones o teorías de este concepto de “conjunto”, como Incurvati piensa. Que una comparación sea fructífera depende de objetivos específicos que no se siguen del primordial, que es estudiar el concepto de “conjunto”. En este sentido, mi posición está más orientada hacia lo que se podría llamar *pluralismo de concepciones*:

diversas concepciones incompatibles pueden ofrecer estudios distintos del mismo concepto, enriqueciendo la capacidad de este de ofrecer nuevas aplicaciones interesantes en lógica, matemáticas y filosofía. Esto está basado en una posición general sobre qué es un conjunto, y es que un conjunto es un objeto *susceptible de tener elementos*. Es decir, considero que un conjunto es cualquier objeto sobre el cual tenga sentido decir que posee elementos. Si esto es correcto, una teoría de conjuntos es simplemente una teoría que estudie estos objetos, no más. Al ser este concepto tan simple, cualquier concepción de “conjunto” ofrece una manera de abordar el concepto que no puede descalificarse ni compararse sin más. Esta es la diferencia de fondo entre la posición de Incurvati y la mía. No ahondaré más en mi posición sobre el concepto de “conjunto”, lo dejaré para desarrollo en un trabajo posterior, pero esto es suficiente para exponer por qué el éxito de la concepción iterativa no puede ser guía para juzgar el éxito de la concepción ingenua, sobre todo si este éxito es la totalidad de la justificación de la concepción iterativa. En este punto, me parece haber establecido suficientes razones para considerar a la concepción ingenua como una concepción que vale la pena atender en la misma medida (al menos) en que se ha atendido a la concepción iterativa. Por otro lado, lo argumentado aquí ofrece herramientas para establecer las divergencias entre ambas concepciones y qué relaciones se puede esperar que tengan ambas.

El éxito de la concepción ingenua debe juzgarse desde su capacidad para ofrecer un análisis del concepto de “conjunto”. Aquí esboqué como una virtud dar cuenta de qué tipo de justificación pueden tener las operaciones conjuntistas expresadas en los axiomas tradicionales de ZFC. Nótese que esto no implica sostener el objetivo de Recaptura, pues este último implica a su vez preservar los resultados de la matemática clásica con la misma relevancia. Sin embargo, aquí el objetivo es distinto. Lo que se pretende es clarificar la idea de “operación conjuntista” en términos de la noción de “propiedad”, aunque las teorías inconsistentes siguen teniendo su importancia independiente. Después de todo, una virtud de las teorías inconsistentes podría consistir en establecer preguntas sobre su contraparte clásica. De la misma forma, se puede extender este tipo de motivación a otros casos de matemática inconsistente (e incluso de matemática no clásica en general). Lo que se debe hacer es identificar qué tipo de motivaciones independientes pueden tener estas teorías y extraer de ellas criterios para juzgar su éxito. En la teoría de conjuntos, parece haber una motivación clara para (Comp). ¿Qué principios puede

haber para el caso de la aritmética o el análisis? Discutiré este tipo de problemas en otros trabajos.³⁴

Referencias

- Aczel, P. y Rathjen, M. (2001). *Notes on Constructive Set Theory. Report No. 40, 2000/2001*. Institut Mittag-Leffler.
- Amor Montaña, J. A., Campero Arena, G. y Miranda Perea, F. V. (2011). *Teoría de conjuntos. Curso intermedio*. UNAM.
- Badía, G. y Weber Z. (2019). A Substructural Logic for Inconsistent Mathematics. En A. Reiger y G. Young (eds.), *Dialetheism and its Applications* (pp. 152-176). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-30221-4_9
- Carnielli, W. y Coniglio, M. E. (2016). *Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-33205-5>
- Crabbé, M. (2011). Reassurance for the Logic of Paradox. *The Review of Symbolic Logic*, 4(3), 479-485. <https://doi.org/10.1017/S1755020311000207>
- Devlin, K. (1980). *Fundamentals of Contemporary Set Theory*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0084-7>
- Diaconescu, R. (1975). Axiom of Choice and Complementation. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 51(1), 176-178. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1975-0373893-X>
- Dummett, M. (1991). *Frege. Philosophy of Mathematics*. Duckworth.
- Incurvati, L. (2020). *Conceptions of Set and the Foundations of Mathematics*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108596961>
- Istre, E. (2017). *Normalized Naive Set Theory*. University of Canterbury.
- Jech, T. (2002). *Set Theory*. Springer.
- Maddy, P. (1988a). Believing the Axioms. I. *The Journal of Symbolic Logic*, 53(2), 481-551. <https://doi.org/10.2307/2274520>

³⁴ Este trabajo fue apoyado por los proyectos PAPIIT IG400422 y IN406225, así como el proyecto Conahcyt CBF2023-2024-55. Agradezco al grupo de investigación Lógica MEXV, a Luis Estrada González, María Martínez Ordaz y Francisco Netzahualcóyotl Martínez Aviña por sus comentarios puntuales a versiones previas de este trabajo. También agradezco a los dos dictaminadores anónimos de *Tópicos, Revista de Filosofía* por sus comentarios y sugerencias para mejorarlo. Finalmente, agradezco a Luis Bazet, editor de *Tópicos*, por sus comentarios, apoyo y meticulosa atención en la presentación editorial de este trabajo.

- Maddy, P. (1988b). Believing the Axioms. II. *The Journal of Symbolic Logic*, 53(3), 736–764. <https://doi.org/10.2307/2274569>
- Menzel, C. (1986). On the Iterative Explanation of Paradoxes. *Philosophical Studies*, 49, 37-61. <https://doi.org/10.1007/BF00372882>
- Priest, G. (1995). *Beyond the Limits of Thought*. Cambridge University Press.
- Priest, G. (2006a). *Doubt Truth to Be a Liar*. Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/0199263280.001.0001>
- Priest, G. (2006b). *In Contradiction: A Study of the Transconsistent*. Clarendon Press. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199263301.001.0001>
- Quine, W. V. (1937). New Foundations for Mathematical Logic. *The American Mathematical Monthly*, 44(2), 70-80. <https://doi.org/10.1080/00029890.1937.11987928>
- Read, S. (1988). *Relevant Logic. A Philosophical Examination of Inference*. Basil Blackwell.
- Restall, G. (1992). A Note on Naive Set Theory. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 33(3), 422-432. <https://doi.org/10.1305/ndjfl/1093634406>
- Routley, R. (2019). *Ultralogic as Universal? The Sylvan Jungle. Volume 4*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-91974-4>
- Thomas, N. (2014). Expressive Limitations of Naive Set Theory in LP and Minimally Inconsistent LP. *The Review of Symbolic Logic*, 7(2), 341-350. <https://doi.org/10.1017/S1755020314000033>
- Weber, Z. (2010a). Extensionality and Restriction in Naive Set Theory. *Studia Logica*, 94(1), 87-104. <https://doi.org/10.1007/s11225-010-9225-y>
- Weber, Z. (2010b). Transfinite Numbers in Paraconsistent Set Theory. *The Review of Symbolic Logic*, 3(1), 71-92. <https://doi.org/10.1017/S1755020309990281>
- Weber, Z. (2012). Transfinite Cardinals in Paraconsistent Set Theory. *The Review of Symbolic Logic*, 5(2), 269-293. <https://doi.org/10.1017/S1755020312000019>
- Weber, Z. (2021). *Paradoxes and Inconsistent Mathematics*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108993135>
- Zermelo, E. (1967). Investigations in the Foundations of Set Theory. I. En J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931* (pp. 199-215). Harvard University Press.