

USO DE INVARIANTES EN LA APROPIACIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN, EN ALUMNOS DE SEXTO DE PRIMARIA

INVARIANTS USE IN THE APPROPRIATION OF THE FRACTION CONCEPT IN 6TH GRADE OF ELEMENTARY SCHOOL

Alejandro Octavio Delgado Caballero

Alejandro Octavio
Delgado Caballero



Licenciatura y maestría en Psicología, Universidad Nacional Autónoma de México. Ha trabajado desde 2005 en la Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Ajusco, como profesor de tiempo completo en la carrera de Psicología Educativa. Sus principales líneas de investigación son: diversidad cultural y aprendizaje en contextos rurales e indígenas. SNI.
Correo electrónico: [alodeca@yahoo.com.mx].

RESUMEN

En una evaluación realizada en el área de Matemáticas en todos los niveles de una escuela primaria pública, ubicada en una zona marginada de la Ciudad de México, las mayores dificultades se encontraron en la resolución de problemas y fracciones, en alumnos de quinto y sexto grados.

Con base en estos resultados se aplicó, en un grupo de sexto grado, un programa para la apropiación del concepto de fracción, diseñado a partir tres aspectos de la perspectiva histórico-cultural: las invariantes del concepto de fracción, el trabajo colaborativo y la mediación. Los participantes fueron 33 alumnos (15 niñas y 18 niños), con edades entre los 10 años y 9 meses, y 11 años y 8 meses. Para medir los efectos del programa se empleó una prueba de rendimiento académico del uso de fracciones, aplicada como pretest y postest, encontrando diferencias estadísticamente significativas entre ambas aplicaciones. También se realizó una valoración cualitativa del programa por medio del método de observación y la aplicación de cuestionarios a maestra y alumnos, en la cual se encontraron resultados positivos.

Palabras clave: fracciones; invariantes; teoría sociocultural; Matemáticas.

ABSTRACT

In an assessment made in the area of Mathematics at all levels of a public elementary school, located in a marginalized area in Mexico City, the mayor problems were found in fifth and sixth grade, in the resolution of problems and fractions.

Based on these results, was decided to apply in a group of sixth grade a program to appropriate the concept of fraction, designed under the bases of three aspects of the historic-cultural perspective: the invariants of the fraction concept, the collaborative job, and the action. There were 33 students (15 girls and 18 boys), between 10 years and 9 months and 11 years and 8 months. To measure the program effects an academic performance test of fractions was used, applied as a pre-test and post-test, and statistically significant differences between both applications were found. We also performed a qualitative assessment of the program by the method of observation and the application of questionnaires to the teacher and the students, in which positive results were found.

Key words: fraction; invariant; sociocultural theory; Mathematics.

INTRODUCCIÓN

La dificultad que representa el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en la escuela elemental, ha sido una preocupación persistente del gobierno mexicano en las últimas décadas. Trabajos clásicos como los de Guevara¹ y Ornelas² han señalado una constante en el bajo rendimiento escolar que obtienen los alumnos mexicanos en esta asignatura. Evaluaciones más recientes, como las realizadas a través del «Programa internacional para la evaluación de estudiantes» (PISA) por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), han colocado a los estudiantes mexicanos en el nivel más bajo que se puede obtener en esta prueba, desde su primera aplicación en 2000 hasta 2009³ y⁴.

De manera particular, las fracciones han formado parte del currículo de la escuela elemental por más de un siglo, y dada su complejidad a lo largo de este tiempo, se han realizado varias adecuaciones en su enseñanza. En las últimas décadas se elaboraron varias reformas al currículo que repercutieron directamente en la enseñanza de este tema. La primera ocurrió en 1972, cuando en la enseñanza de las fracciones se implementó el empleo de la recta numérica. En 1982 se asumieron ideas piagetanas en la reforma, por lo que se incrementó el uso didáctico de apoyos gráficos y se introdujo la manipulación de objetos como recurso para la enseñanza de las Matemáticas. En 1993 se aplazó la introducción de fracciones hasta tercero y cuarto grado de la escuela primaria, y de la multiplicación y división de las mismas hasta la escuela secundaria⁵; asimismo, en la revisión realizada en 2002, de la reforma de 1993, y en la reforma de 2011, en el tema concerniente a las fracciones, no se presentaron grandes cambios.

La postura piagetana ha tenido mucho impacto en la forma en que se enseñan las fracciones en México, como lo demuestran los manuales para los maestros coordinados por Block⁶ o las investigaciones de

¹ G. Guevara, *La catástrofe silenciosa*.

² C. Ornelas, *El sistema educativo mexicano*.

³ OCDE, *Estudios económicos de la OCDE*.

⁴ SEP, *La prueba PISA en México*.

⁵ Mancera, *Significados y significantes relativos a las fracciones*.

⁶ D. Block, *Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria*.

Dávila⁷, Ramírez⁸, Nunes y Bryant⁹, quienes afirmaron que el aprendizaje del concepto de fracción se dificultaba a los alumnos de los primeros grados por no haber consolidado los conceptos de «conservación» y «reversibilidad» planteados por Piaget.

Sin embargo, de acuerdo con la postura piagetana, si el problema está en gran medida determinado por la maduración de los alumnos y la adquisición del concepto de conservación del entero, ¿por qué los alumnos que supuestamente ya debieran haber adquirido dicho concepto, siguen presentando problemas con las nociones más básicas del concepto de fracción? ¿Tendrá que ver con la maduración o con la forma en que se están enseñando las fracciones?

En este trabajo se asume que el mayor problema en la enseñanza de las fracciones no es la maduración del niño sino la forma en que se enseña el concepto, por lo cual se propone un método alternativo de enseñanza a través del trabajo cooperativo, la mediación del profesor y, como punto central de su enseñanza, el uso de las invariantes del concepto de fracción como herramientas de mediación¹⁰.

En este sentido se retomaron los trabajos realizados por Tallízina¹¹ y Galperín¹², quienes describieron un método para la enseñanza de conceptos científicos por medio del empleo de las invariantes del mismo. Una invariante es aquello que siempre permanece en el concepto, que no se altera. Por ejemplo, en el concepto de «cuadrado», podemos encontrar características que no pueden variar sin que éste se transforme en otra figura geométrica. Éstos son: cuatro lados con la misma medida y cuatro ángulos de 90 grados; si alguna de las características mencionadas llegara a variar, no podría afirmarse que es un

⁷ M. Dávila, *El reparto y las fracciones*.

⁸ Ramírez y Block, *La razón y la fracción: un vínculo difícil en las Matemáticas escolares*.

⁹ T. Nunes y P. Bryant, *Las Matemáticas y su aplicación*.

¹⁰ R. Baquero, *Vigotsky y el aprendizaje escolar*; R. Durán, *Algunas ideas de la teoría socio-cultural*; A. Kozulin, *Instrumentos psicológicos*; N. Tallízina, *Psicología de la enseñanza*.

¹¹ N. Tallízina, *Los fundamentos de la enseñanza en la educación superior*.

¹² P. Galperín, *Sobre la formación de las imágenes sensoriales y de los conceptos*.

cuadrado. Sin embargo, en la enseñanza suele presentarse el concepto matemático con diversos elementos irrelevantes que distraen la atención de los alumnos y los confunden.

La enseñanza bajo este método consiste en mostrar al alumno diversas situaciones en donde estén presentes las invariantes del concepto, de tal forma que pueda reconocerlo. Asimismo, se presentan situaciones o «contraejemplos» para que el alumno pueda darse cuenta de que, al no estar presentes alguna o algunas de las invariantes, ya no se está hablando del concepto referido. Las invariantes utilizadas para la enseñanza del concepto de fracción fueron:

1. El objeto puede ser dividido¹³.
2. El objeto puede dividirse en las partes que uno quiera.
3. En la repartición del objeto no puede sobrar nada.
4. Las partes deben ser iguales.
5. Las partes también pueden considerarse como un objeto independiente.
6. Si se reúnen todas las partes, vuelve a formarse el objeto.
7. El divisor debe ser diferente de cero.

Por otro lado, el concepto de fracción puede ser definido como:

[...] una extensión de los números naturales, en la cual un número natural es dividido por otro número natural, diferente de cero, la división debe realizarse en partes iguales, esas partes pueden volverse a constituir en un todo¹⁴.

Lo que se entiende por fracción no es simple; existen muchas formas en las cuales se emplea el término sin que haya una relación aparente entre ellas. La tabla 1 hace referencia a algunas.

¹³ M. Llinares; A. Salvador y V. Sánchez, en **Las fracciones diferentes interpretaciones**, explican que en el mundo no todo puede fraccionarse (como sería el caso de los seres vivos, sin que éstos pierdan sus propiedades y por tanto no se pueda obtener una proporción en las partes divididas).

¹⁴ R. Courant y H. Stewart, **What Is Mathematics?**, p. 52.

De tal forma, el objetivo principal de este estudio consistió en comprobar qué tan efectivo era el método de enseñanza basado en el uso de las invariantes como herramientas para el aprendizaje de fracciones en alumnos de sexto grado de educación básica.

MÉTODO

En una investigación previa, en una escuela primaria pública ubicada en la delegación Iztapalapa del Distrito Federal se detectó que, en el área de Matemáticas, el promedio general en quinto grado fue de 5.1 y en sexto de 4.7¹⁵. En dicha investigación también se observó que uno de los principales problemas se encontraba relacionado con el tema de fracciones, debido a que en el examen aplicado a los alumnos de sexto grado (acababan de cursar el quinto) obtuvieron, en el tema de fracciones, un promedio de 2 en una escala de 1-10, lo cual contrastaba con la gran cantidad de horas dedicadas a su estudio en el currículo de quinto y sexto, pero concuerda con la dificultad en el aprendizaje de dicho tema descrito en documentos de la SEP¹⁶ (1992 y 2002) y en datos de autores como Garduño, Ayala, Favila, López¹⁷ y Mancera¹⁸.

Contexto: Escuela primaria pública ubicada en la delegación Iztapalapa, caracterizada por encontrarse en una zona con asentamientos irregulares y con una población de bajos recursos económicos. Según datos del INEGI¹⁹, la delegación tiene 1'815.786 habitantes y el 45.4% recibe uno o dos salarios mínimos.

Participantes: Los participantes fueron 33 alumnos (15 niñas y 18 niños), con edades entre los 10 años y 9 meses, y 11 años y 8 meses, que cursaban el sexto grado de la escuela primaria.

¹⁵ A. Delgado, **Apropiación de fracciones en alumnos de sexto de primaria con bajo rendimiento académico en Matemáticas.**

¹⁶ SEP, **Planes y programas de estudio de educación básica.**

¹⁷ C. Garduño; G. Ayala; F. Favila y E. López, **Las fracciones. Una propuesta constructivista para su enseñanza-aprendizaje.**

¹⁸ E. Mancera, **Significado y significantes relativos a las fracciones.**

¹⁹ INEGI, **Banco de información INEGI.**

INSTRUMENTOS

Prueba del uso de fracciones para quinto y sexto de primaria. Consta de 26 reactivos, retomando las interpretaciones del concepto de fracción presentadas en la tabla 1; ésta fue validada en 2004 en una población de 200 alumnos de quinto y sexto de primaria, de la misma zona en la que se realizaron las prácticas. Un ejemplo de los reactivos se muestra en la figura 1. La prueba se utilizó como pretest-postest.

Hoja de registro de las actividades por sesión. Registro por sesión de los hechos más relevantes observados en los alumnos y la maestra del grupo.

Buzón. Registro que realizaban los alumnos por sesión, de forma anónima, para expresar sus opiniones respecto a lo que les había gustado o no de las actividades, coordinadores, materiales, etcétera. Fueron clasificados como positivos (cuando expresaban que les había gustado algo de la sesión), negativos (cuando expresaban que no les había gustado) y neutros (cuando dejaban el papel en blanco, o elaboraban un dibujo o comentario que no expresaba agrado o desagrado).

Cuestionario para los alumnos. Diseñado para conocer su opinión con relación a diversos aspectos del programa, por ejemplo, si consideraban haber aprendido sobre las fracciones, si las actividades les gustaron o qué no les gustó de ellas. Constaba de 8 preguntas.

Cuestionario para la maestra. Incluía 32 preguntas formuladas para conocer su opinión sobre el programa y su aplicación. Por ejemplo, su percepción sobre la estrategia empleada, sobre las actividades y los materiales usados.

PROCEDIMIENTO

Se llevaron a cabo 19 actividades en 32 sesiones de una hora. Las primeras sesiones se emplearon en la revisión de operaciones básicas y la introducción al trabajo por medio de invariantes. En el resto se revisaron las diferentes formas de interpretación del concepto de fracción expuestas en la tabla 1. Los alumnos se agrupaban en 6 equipos y

se les exponía un problema con fracciones. Durante su resolución, los coordinadores ofrecían diversos niveles de ayuda (mediación), para favorecer que llegaran al resultado sin proporcionarles la solución. Terminada la actividad, anotaban sus procedimientos y resultados en el pizarrón, y escogían a un expositor para que el grupo analizara la solución de cada equipo. Las características de las actividades eran:

- ▶ Se realizaba un recordatorio constante de las invariantes por medio del uso de tarjetas individuales, carteles y actividades diseñadas específicamente para este fin.
- ▶ Se empleaban las invariantes para diferenciar entre ejemplos y contraejemplos.
- ▶ Se procuraba que las actividades fuesen de un menor a un mayor grado de dificultad y que los alumnos con mayores problemas recibieran más ayuda.
- ▶ Para mantener la motivación de los alumnos se utilizaban materiales llamativos, concretos, fácilmente manipulables, con actividades atractivas, lúdicas y relacionadas con su vida cotidiana. Asimismo, se hacían constantes variaciones en el tipo de materiales, las interpretaciones de fracción y la presentación de los problemas.
- ▶ En un principio, las actividades se apoyaban en figuras geométricas, por ejemplo, a cada equipo se le pidió que hiciera su «logo» empleando fracciones y figuras geométricas planificadas previamente. Durante su elaboración, los coordinadores pasaban a los equipos a preguntar si cumplían las invariantes del concepto y también proporcionaban «ejemplos» y «contraejemplos» a manera de mediación, de modo que demostraran que la figura estaba dividida en partes iguales, obteniendo su área, pues no era suficiente con dividir una figura en x partes, como se muestra en la figura 2.

Con el paso del tiempo se revisaron temas complejos (como el de porcentajes), aun así, la actividad se graduaba. Por ejemplo, se diseñó una actividad donde se les presentó un tablero con 60 peces: 20 rojos, 20 amarillos y 20 azules (figura 3), a través del cual se revisó el tema

de porcentajes. Se les mostraba el tablero de peces y se les explicaba que, en el porcentaje, el total de los peces equivalía al 100%. Después, a cada equipo se le entregaba una hoja con un planteamiento que contenía diversos problemas; en el primero se les pedía que sacaran el 50% de los peces. Como estrategia de mediación se les explicaba que *el porcentaje es una fracción con denominador 100, es decir $1/100$. Si queremos sacar el 50%, tenemos que tomar $50/100$, lo que es igual a $5/10$ e igual a $1/2$, después se les preguntaba a cuánto equivale un medio de los 60 peces*. Posteriormente, se incrementaba la dificultad al pedirles, por ejemplo, que quitaran el 20% de los peces rojos o $1/10$ de los azules. En cada caso, los equipos, pasaban al pizarrón a exponer sus resultados y si eran correctos, empleaban el tablero de peces para demostrarlos.

RESULTADOS

Prueba del uso de fracciones en quinto y sexto de primaria. El promedio en el postest siguió siendo reprobatorio, pero se observó un aumento de más del 50% en relación con el pretest (ver tabla 2), además el número de alumnos aprobados se elevó de 2 a 10. La prueba estadística no paramétrica de Wilcoxon²⁰ reportó, con un nivel de confianza del 0.01, que existen diferencias significativas entre pretest-postest.

Actividades realizadas en equipo. El promedio obtenido por los equipos con una escala de 0 a 10, fue satisfactorio cuando se ofrecía mediación (ver tabla 3).

Cambios en las calificaciones. Debido a que el tema de fracciones se revisa ampliamente en el sexto grado, se decidió emplear los resultados de las evaluaciones bimestrales de Matemáticas de la maestra;

²⁰ Se empleó esta prueba no paramétrica para dos muestras relacionadas, ya que permitiría conocer diferencias entre las dos evaluaciones, además de que la población era pequeña y las calificaciones del pretest no cumplieron con el supuesto de normalidad.

éstas reflejaron un cambio positivo gradual, en donde el promedio cambió de 7.12, en el primer bimestre, a 7.82 en el quinto. La prueba estadística no paramétrica de Freedman²¹ mostró la existencia de cambios estadísticamente significativos, con un nivel de confianza de 0.01.

Hoja de registro de las actividades por sesión. La información obtenida se clasificó en los siguientes rubros:

- a) *Manejo de las invariantes.* Los alumnos se apropiaron mejor de algunas invariantes y no todos se apropiaron de todas. Esto se explica porque el uso e importancia de las mismas no era igual en todas las actividades y algunas eran mencionadas más frecuentemente al dar ejemplos y contraejemplos.
- b) *Confianza y seguridad en sí mismos.* Para sistematizar datos se llevaba de manera cotidiana un registro del progreso de los alumnos en donde sobresalieron avances importantes en su confianza y seguridad. Algunos, que al principio no defendían sus resultados, a mediados del programa no sólo lo hacían, sino que también señalaban los errores cometidos por los coordinadores. Por ejemplo, el director de la escuela, que solía ir a observar la aplicación del programa, llegó a afirmar que le sorprendía la seguridad con que los alumnos exponían sus resultados frente al grupo.
- c) *Manejo de áreas de figuras geométricas.* El trabajo con fracciones de superficies dio lugar a avances en la comprensión de áreas de figuras geométricas, observada tanto por la maestra, como por los coordinadores del programa. Por ejemplo, algunos de los alumnos que confundían el cuadrado y el rectángulo, cuando perceptualmente tenían un tamaño parecido, hicieron un uso incipiente de las invariantes para distinguir uno de otro y no confundirlos; de esta forma, el saber que un cuadrado tenía cuatro lados iguales y ángulos de 90 grados, les servía como invariante que empleaban para discriminar entre éste y otras figuras geométricas parecidas.

²¹ Se empleó esta muestra estadística no paramétrica para tres o más muestras relacionadas, debido a que las calificaciones están en una escala ordinal.

- d) **Soluciones alternativas a los problemas.** Los alumnos buscaban y aceptaban opciones diferentes para realizar las actividades, lo que en un principio resultaba difícil aún para los alumnos con mejor aprovechamiento. Por ejemplo, algunos decidían emplear estrategias numéricas, mientras otros usaban recursos gráficos.
- e) **Las actividades representaron un nivel de dificultad diferente para los equipos.** Había equipos que presentaban mayores dificultades para la realización de los ejercicios, lo que llegaba incluso a afectar su motivación. En estos casos, los coordinadores pusieron especial atención para prestar mayor ayuda.
- f) **Problemas de comprensión lectora.** Los alumnos presentaban problemas de comprensión de lectura, por lo que una de las ayudas más frecuentes era la guía para la lectura del problema en voz alta. De esta forma, los alumnos comprendían lo que se les pedía y ello facilitaba su resolución.
- g) **Falta de continuidad en las sesiones.** Frecuentemente, las sesiones debían suspenderse debido a juntas, festejos y otros eventos escolares. Ello rompía la continuidad del trabajo, sobre todo porque sólo se asistía a la escuela dos veces a la semana y hubo ocasiones en que se dejó de ver a los alumnos hasta por tres semanas. Esto se reflejaba más en el trabajo que realizaban los alumnos con mayores problemas de aprovechamiento escolar.

Buzón

El buzón servía como «termómetro» para saber si había que modificar algo en las actividades. Cuando éstas resultaban más atractivas para los alumnos, los comentarios positivos eran mayores; cuando la actividad no lograba capturar por completo su interés, los resultados neutros y negativos se incrementaban.

Cuestionario para los alumnos

La mayoría de los alumnos expresó haber aprendido fracciones (61%); en menor cantidad, hubo quien opinó que aprendió algo (31%), y sólo un 8% dijo que aprendió poco o nada. Lo que más les gustaron

fueron las actividades y la queja más frecuente fue la conformación de los equipos, pues no se permitió que se realizaran cambios de integrantes.

Percepción de la maestra respecto al programa

Esta percepción fue evaluada a partir de las hojas de registro de observación y del cuestionario aplicado al final del curso. Los resultados se agruparon en los siguientes rubros:

- a) ***Temas que se incluyeron o no en el programa.*** La maestra señaló que se revisaron todos los temas referentes a fracciones de acuerdo con el currículo de sexto grado, aunque opinó que faltó dedicarle más tiempo al tema de decimales.
- b) ***Las actividades.*** Su opinión de las actividades pasó por tres etapas: una inicial de desconcierto; una segunda en donde no estaba tan de acuerdo con las actividades, porque pensaba que eran más juego que trabajo y porque con ellas se relajaba el control del grupo; y finalmente una tercera en donde, con la reestructuración de las actividades, se observó una actitud más positiva en la maestra.
- c) ***El aprendizaje de los alumnos.*** En la primera etapa, incluso cuando la maestra no estaba del todo satisfecha con las actividades, reconocía avances en los alumnos. A partir de la segunda etapa, sus comentarios sobre los avances en el aprendizaje de los alumnos fueron más positivos. Por ejemplo, comentaba su sorpresa al ver que los alumnos pudieron resolver actividades con una complejidad elevada e incrementaron sus niveles de participación.
- d) ***La viabilidad para llevar a cabo el programa.*** La maestra opinó que el programa puede ser aplicado por otros profesores y en otras escuelas por su utilidad; el manual con las actividades fue entregado a la escuela²².

²² También puede consultarse el manual en Delgado, *op. cit.*

- e) *Lo motivante de las actividades.* Consideró que las actividades fueron estimulantes y muy atractivas para los alumnos.
- f) *La influencia del programa en su práctica docente.* La maestra señaló que el programa repercutió en forma positiva en su práctica docente, al darse cuenta de la aplicación de las invariantes en la enseñanza y considerar su uso en otros temas, además de las fracciones.

CONCLUSIONES

Como se revisó en los resultados, existe una diferencia estadísticamente significativa entre el pretest y el postest. A partir de los 26²³ casos analizados, el resultado obtenido en la segunda evaluación se incrementó en más de un 100% con respecto a la primera. Las diferencias observadas, entre el pretest y el postest, fueron ratificadas por la aplicación de la prueba de Wilcoxon; con ésta pudo comprobarse la existencia de cambios significativos entre la primera y la segunda aplicación de la prueba. Además, mientras en la primera aplicación sólo el 7.2% de alumnos obtuvo una calificación aprobatoria, en la segunda, el porcentaje de alumnos aprobados fue del 42.3%.

Del mismo modo, el uso que los alumnos hacían de las invariantes para discriminar entre lo que era y no era fracción, resultó ser de gran utilidad en la resolución de las actividades, pues les servía de guía para resolver problemas con alto nivel de dificultad, lo que atrajo comentarios positivos de la maestra a este respecto; además, los niños empezaron a hacerlas extensivas para identificar otros conceptos científicos, como en el caso del concepto de cuadrado descrito con anterioridad.

Pese a la existencia de dichos cambios, cabe cuestionar a qué se debe que, aún en la segunda aplicación, el índice de reprobación entre los alumnos fuera tan alto, pues sólo 11 de los 26 alumnos obtuvieron

²³ Algunos de los alumnos que participaron en el taller, no se presentaron el día en que se aplicó el pretest o el postest, por lo que no se consideraron para el análisis.

una calificación aprobatoria. A este respecto cabe señalar que la prueba era estandarizada y no daba cuenta del proceso, además de que en su aplicación se eliminó la mediación por parte de los coordinadores. Por esta razón, además de la prueba se emplearon otras formas para evaluar la eficiencia del programa.

Los alumnos mostraron una alta calificación en la evaluación de las actividades, aun cuando muchos de estos problemas presentaban un alto nivel de complejidad, lo cual podía conocerse a través de los comentarios que dejaban en el buzón al finalizar la actividad. Estos resultados favorables pueden justificarse debido a que, en contraste con la resolución individual de la prueba, los alumnos tenían la oportunidad de compartir y discutir las posibles soluciones de los problemas, con lo cual se favorecía que los alumnos que presentaban mayores problemas en la resolución de las actividades fueran auxiliados por sus compañeros de equipo.

Con respecto a la percepción que los alumnos tuvieron de los coordinadores, puede señalarse que todos, incluyendo a la maestra del grupo, presentaron una aceptación positiva de ellos, además de la forma en que se llevó a cabo el programa de intervención. ■

TABLA 1.

FORMAS DE ENTENDER LA FRACCIÓN

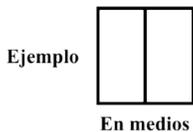
Tipo de unidades	Interpretación de la fracción	Tipo de fracción
Discretas	Como parte-todo	Propias
Continuas	Como cociente	Impropias
	Como recta numérica	Igual a la unidad
	Como decimales	Mixtas
	Como porcentajes	
	Como expresión numérica (medida)	
	Como razón	

TABLA 2.					
RESULTADOS ESTADÍSTICOS DEL PRETEST-POSTEST					
Estadísticos	Media	Mediana	Moda	Mínima	Máxima
<i>Pretest</i>	2.11	1.15	1.87	.38	8.84
<i>Posttest</i>	4.47	4.07	4.38	1.48	9.26

TABLA 3.	
PROMEDIO DE CALIFICACIONES POR EQUIPO EN LOS 19 EJERCICIOS REALIZADOS	
Nombre del equipo	Calificación promedio
Black White	8,69
Cupidos	8,55
DarkShark	8,62
Delfines Blancos	8,58
Chicas y chico	8,57
Tramosos	9,17

FIGURAS:

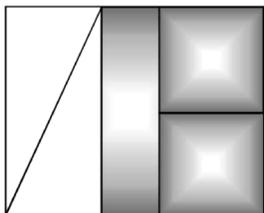
1. Observa las siguientes figuras y divídelas como se muestra en el ejemplo.



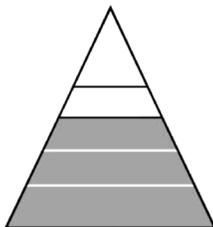
Ejercicios:



Figura 1. Ejemplo de tres reactivos de la prueba empleada.



Ejemplo



Contraejemplo

Figura 2. A pesar de que visualmente ninguno de los dos pareciera $\frac{2}{5}$, al medir el área la primera figura sí cumple con la invariante de que las partes son iguales al tener la misma área.



Figura 3. Tablero de peces.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAQUERO, R., **Vigotsky y el aprendizaje escolar**, Aique, España, 2001.

BLOCK, D., **Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria**, DIE-CINVESTAV-IPN, México, 1987.

COURANT, R.; HERBERT, R., e IAN, S., **What Is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods**, Oxford University Press, London, 1996.

DÁVILA, M., «El reparto y las fracciones», **La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria**, Lecturas, México, SEP, 1995, p. 9-45.

DELGADO, A., **Apropiación de fracciones en alumnos de sexto de primaria con bajo rendimiento académico en matemáticas**, UNAM, México, 2006.

DURÁN, R., «Algunas ideas de la teoría socio-cultural», **Curso-taller: Recursos y estrategias para el desarrollo de habilidades matemáticas**, SEP, México, 2001, p. 69-78.

GALPERÍN, P., «Sobre la formación de las imágenes sensoriales y de los conceptos», **La formación de las funciones psicológicas durante el desarrollo del niño**, Universidad Autónoma de Tlaxcala, México, 1995, p. 27-41.

GARDUÑO, C.; AYALA, G.; FAVILA, F. y LÓPEZ, E., «Las fracciones. Una propuesta constructivista para su enseñanza-aprendizaje», **Correo del maestro**, n. 56, vol. 5, 2001, p. 8-19.

INEGI, **Banco de información INEGI**, INEGI, México, en: [<http://www3.inegi.org.mx/sistemas/biinegi/?e=09&m=007&src=487>] Consultado: 28-VIII-2013.

KOZULIN, A., **Instrumentos psicológicos: La educación desde una perspectiva sociocultural. Cognición y desarrollo humano**, Paidós, España, 2000.

LLINARES, M.; SALVADOR, A. y SANCHEZ, V., «Las fracciones, diferentes interpretaciones», **Fracciones. La relación parte todo**, Síntesis, España, 1988, p. 51-78.

MANCERA, E., «Significado y significantes relativos a las fracciones», **Educación matemática**, n. 2, vol. 4, 1992, p. 30-54.

GUEVARA, G., **La catástrofe silenciosa**, Fondo de Cultura Económica, México, 1992.

NUNES, T. y Bryant, P., **Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño**, Siglo XXI, México, 1997.

OCDE., **Estudios económicos de la OCDE**, OECD Publishing, México, 2005.

ORNELAS, C., **El sistema educativo mexicano. La transición de fin de siglo**, Fondo de Cultura Económica, México, 1995.

RAMÍREZ, M. y BLOCK, D., «La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares», **Educación matemática**, n. 1, vol. 21, 2009, p. 63-90.

SEP., «La prueba PISA en México», en: [http://www.pisa.sep.gob.mx/pisa_en_mexico.html]. Consultado: 13-VIII-2013.

_____, **Planes y programas de estudio de educación básica**, SEP, México, 2002.

TALLÍZINA, N., **Los fundamentos de la enseñanza en la educación superior**, Ángeles editores, México, 1994.

_____, Editorial Progreso, Moscú, 1988.